Ministère des Enseignements Secondaires
Collège polyvalent de Bépanda
BP : 11073 Douala
Département de Mathématiques

Année Scolaire : 2018/2019
Classe : T[le]C ; Coef : 5
Durée : 4 Heures
Proposé : CHEMEGNI GUY

BACCALAUREAT BLANC / EPREUVE DE MATHEMATIQUES/ MAI 2019

L'épreuve comporte 2 exercices et un problème. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : $[4{,}75\ points]$

On pose $a = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6})$; $b = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4})$; $c = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3})$

A) 1. Exprimer a^6, b^6 et c^6 sous forme algébrique. 0,25 pt x 3

2. En déduire une solution de l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}, z^6 = -8i$. 0,25pt.

3. Soit $j = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

a. Vérifier que $j^3 = 1$. 0,25 pt

b. Démontrer que jb et j^2b sont aussi solution de (E). 0,5 pt

c. En déduire toutes les solutions de (E). 0,75 pt

B) 1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases} x \equiv 0[6] \\ x \equiv 2[4] \end{cases}$ 0,75 pt

2. Déterminer tous les entiers naturels n vérifiant à la fois les deux propositions suivantes :

- a^n est un nombre réel ;
- b^n est un imaginaire pur. 1,5 pt

Exercice 2 : $[4{,}25\ points]$

A) On considère trois urnes U, V et W contenant chacune des boules portant le numéro 1 ou le numéro 2. La probabilité de tirer une boule numérotée 1 de U est $P_1 = 0{,}4$; celle de tirer 1 de V est $P_2 = 0{,}5$ et enfin celle de tirer 1 de W est $P_3 = 0{,}7$.

On tire une boule de U, une boule de V et une autre de W. Soient a, b et c les numéros respectifs de ces boules. Soit (Q) le plan d'équation $ax + by + cz + 6 = 0$, et $soit$ (E) la conique d'équation : $\frac{x^2}{a^2} - (-1)^c\frac{y^2}{b^2} = 1$. Calculer la probabilité pour que :

1. (Q) soit parallèle au plan (P) : $x + 2y + z - 4 = 0$; 0,5 pt
2. (Q) contienne le point $M(0, -2, -4)$; 0,5 pt
3. (E) soit une ellipse ; 0,5 pt
4. (E) soit une hyperbole équilatère. 0,5 pt

B) Un jeu consiste à tirer une boule de chaque urne :

- Dans U, une boule n°1 tirée fait gagner 40 F tandis que la boule n°2 fait perdre 60 F ;
- Dans V, une boule n°1 tirée fait gagner 50 F tandis que la boule n°2 fait perdre 50 F ;
- Dans W, une boule n°1 tirée fait gagner 70 F tandis que la boule n°2 fait perdre 30 F ;

1. Quels sont les sommes possibles qu'un joueur peut avoir à l'issu de ce jeu ? 0,5 pt

2. On appelle X la variable aléatoire réelle donnant la somme eu par un joueur après les tirages.

a. Définir la loi de probabilités de X. 1 pt

b. Calculer l'espérance mathématique E(X). Le jeu est-il avantageux pour le joueur ? 0,75 pt

<u>Problème</u> : $[11\ points]$

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A : E désigne un espace vectoriel de dimension 3 muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et f l'endomorphisme de E défini par $f(\vec{i}) = \vec{i}$, $f(\vec{j}) = f(\vec{k}) = \frac{1}{2}(\vec{j} + \vec{k})$. On note Ker$f$ le noyau de f et Imf l'image de E par f.

1. Déterminer une base de Ker$f$. 0,5 pt
2. Déterminer une base de Imf. 0,5 pt
3. Démontrer que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de Ker$f$ et d'un vecteur de Imf. 0,5 pt

Partie B : Le plan ($\wp$) est muni d'un repère orthonormé (o ; $\vec{i}$; $\vec{j}$). Unité graphique 2cm. Soit g la transformation du plan qui à tout M(x, y) associe le point M'(x', y') tel que : $\begin{cases} 4x' = x - \sqrt{3}y \\ 4y' = \sqrt{3}x + y \end{cases}$

1) a. Déterminer l'écriture complexe de g. 0,5 pt

b. En déduire que g est une similitude directe plane dont on déterminera le centre, le rapport et l'angle. 0,75 pt

2) Soit (Γ) l'ensemble des points M(x, y) du plan tels que : $7x^2 + 13y^2 - 6\sqrt{3}xy = 64$ et (Γ')

Son image par g.

a. Déterminer une équation cartésienne de (Γ'). 0,75 pt

b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ'). 0,75 pt

c. En déduire que (Γ) est une ellipse dont on précisera le centre, les foyers, les sommets et l'excentricité. 0,75 pt

Partie C : On considère la fonction f définie sur$[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}$

1) Montrer que f est dérivable sur $[0; +\infty[$, étudier le signe de sa fonction dérivée f', sa limite éventuelle en $+\infty$, et dresser le tableau de ses variations. 1,75 pt

2) On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par son terme général $u_n = \int_n^{n+1} f(x)\, dx$.

a. Justifier que si $n \leq x \leq n+1$, alors $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$. 0,5 pt

b. Montrer sans chercher à calculer u_n, que, pour tout entier$n$, $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite. 0,5 pt

3) Soit F la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par F$(x) = [\ln(x+3)]^2$.

a. Justifier la dérivabilité sur $[0; +\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x, le nombre $F'(x)$. 0,5 pt

b. On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \int_0^n f(x)dx$. Calculer I_n. 0,5 pt

4) On pose pour tout entier naturel $n, S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1}$.

CalculerS_n. La suite (S_n) est- elle convergente ? 0,75 pt