Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques : analyse et approches
Niveau supérieur
Épreuve 2

Vendredi 7 mai 2021 (matin)

Numéro de session du candidat

2 heures

Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[110 points]**.

2221 – 7117

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

Section A

Répondez à **toutes** les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. [Note maximale : 6]

Dans un café, le temps d'attente entre la commande et la réception d'une tasse de café dépend du nombre de clients ayant déjà commandé leur café et qui attendent de le recevoir.

Sarah, une cliente régulière, a visité ce café cinq jours consécutifs. Le tableau suivant montre le nombre de clients, x, devant Sarah, ayant déjà commandé leur café et qui attendent de le recevoir ainsi que le temps d'attente de Sarah, y minutes.

Nombre de clients (x)	3	9	11	10	5
Temps d'attente de Sarah (y)	6	10	12	11	6

La relation entre x et y peut être modélisée par la droite de régression pour y en fonction de x dont l'équation est $y = ax + b$.

(a) (i) Trouvez la valeur de a et la valeur de b.

(ii) Écrivez la valeur du coefficient de corrélation de Pearson, r. [3]

(b) Interprétez, dans le contexte, la valeur de a trouvée dans la partie (a)(i). [1]

Lors d'un autre jour, Sarah se rend dans ce même café pour commander une tasse de café. Sept clients ont déjà commandé leur café et attendent de le recevoir.

(c) Utilisez le résultat de la partie (a)(i) pour estimer le temps d'attente de Sarah avant de recevoir son café. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. [Note maximale : 5]

Le premier terme d'une suite arithmétique est 60 et sa raison est $-2,5$.

(a) Étant donné que le $k^{ième}$ terme de la suite est zéro, trouvez la valeur de k. [2]

Soit S_n la somme des n premiers termes de la suite.

(b) Trouvez la valeur maximale de S_n. [3]

3. [Note maximale : 8]

Dans un établissement scolaire, $70\,\%$ des élèves pratiquent un sport et $20\,\%$ des élèves font du théâtre. $18\,\%$ des élèves ne font aucune de ces deux activités.

Un élève est choisi au hasard.

(a) Trouvez la probabilité que cet élève pratique un sport et fasse du théâtre. [2]

(b) Trouvez la probabilité que cet élève fasse du théâtre, mais qu'il ne pratique pas un sport. [2]

Dans cet établissement scolaire, $48\,\%$ des élèves sont des filles et $25\,\%$ des filles font du théâtre.

Un élève est choisi au hasard. Soit G l'événement « l'élève est une fille » et soit T l'événement « l'élève fait du théâtre ».

(c) Trouvez $\mathrm{P}(G \cap T)$. [2]

(d) Déterminez si les événements G et T sont indépendants. Justifiez votre réponse. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4. [Note maximale : 6]

Les fonctions f et g sont définies pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 6x^2 - 12x + 1$ et $g(x) = -x + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

(a) Trouvez l'image de f. [2]

(b) Étant donné que $(g \circ f)(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminez l'ensemble des valeurs possibles pour c. [4]

5. [Note maximale : 7]

Toutes les plantes vivantes contiennent un isotope de carbone appelé carbone-14. Lorsqu'une plante meurt, l'isotope se désintègre, de sorte que la quantité de carbone-14 présente dans les restes de la plante diminue. Le temps écoulé depuis la mort de la plante peut être déterminé en mesurant la quantité de carbone-14 qui est encore présente dans les restes de la plante.

La quantité, A, de carbone-14 présente dans une plante t années après sa mort peut être modélisée par $A = A_0\mathrm{e}^{-kt}$, où $t \geq 0$ et A_0, k sont des constantes positives.

Au moment de sa mort, une plante est considérée comme ayant 100 unités de carbone-14.

(a) Montrez que $A_0 = 100$. [1]

On sait que le temps nécessaire pour que la moitié de la quantité initiale de carbone-14 se désintègre est de 5730 années.

(b) Montrez que $k = \dfrac{\ln 2}{5730}$. [3]

(c) Trouvez, en arrondissant à la dizaine d'années la plus proche, le temps nécessaire pour que 25% du carbone-14 se désintègre après la mort de la plante. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. [Note maximale : 6]

Une variable aléatoire continue X a la fonction de densité f_n donnée par

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x^n, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}$$

où $n \in \mathbb{R}$, $n \ge 0$.

(a) Montrez que $\mathrm{E}(X) = \dfrac{n+1}{n+2}$. [2]

(b) Montrez que $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{n+1}{(n+2)^2(n+3)}$. [4]

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

7. [Note maximale : 5]

Huit coureurs participent à une course où il n'y a pas d'ex æquo à l'arrivée. Andrea et Jack sont deux des huit participants à cette course.

Trouvez le nombre total de façons possibles dont les huit coureurs peuvent finir si Jack termine

(a) dans la position immédiatement après Andrea ; [2]

(b) dans n'importe quelle position après Andrea. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

8. [Note maximale : 5]

Considérez $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, où $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$.

Montrez que $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) = 0$.

9. [Note maximale : 8]

(a) Écrivez les trois premiers termes du développement de $(1 + t)^{-1}$ en puissances ascendantes de t. [1]

(b) En utilisant la série de Maclaurin pour $\cos x$ et le résultat de la partie (a), montrez que la série de Maclaurin pour $\sec x$ jusqu'au terme en x^4 et incluant ce dernier est $1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}$. [4]

(c) En utilisant la série de Maclaurin pour $\arctan x$ et le résultat de la partie (b), trouvez $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\arctan 2x}{\sec x-1}\right)$. [3]

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

Section B

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

10. [Note maximale : 15]

Les temps de vol, T minutes, entre deux villes peuvent être modélisés par une distribution normale de moyenne 75 minutes et d’écart type σ minutes.

(a) Étant donné que 2% des temps de vol prennent plus de 82 minutes, trouvez la valeur de σ. [3]

(b) Trouvez la probabilité qu’un vol choisi au hasard ait un temps de vol supérieur à 80 minutes. [2]

(c) Étant donné qu’un vol entre les deux villes prend plus de 80 minutes, trouvez la probabilité qu’il prenne moins de 82 minutes. [4]

Un jour donné, 64 vols sont prévus entre ces deux villes.

(d) Trouvez le nombre espéré de vols qui auront un temps de vol supérieur à 80 minutes. [3]

(e) Trouvez la probabilité que plus de 6 des vols au cours de ce jour donné aient un temps de vol supérieur à 80 minutes. [3]

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

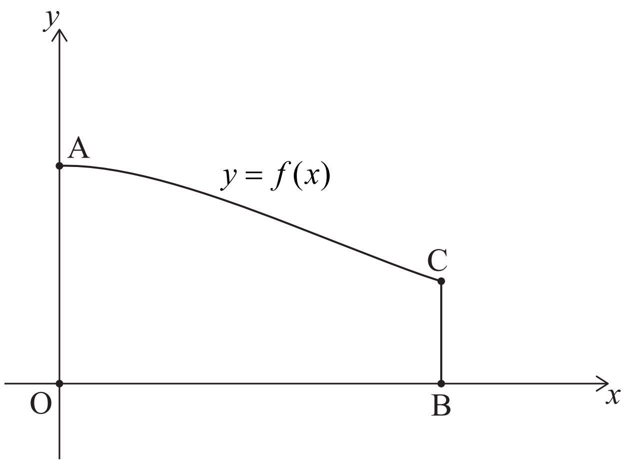
11. [Note maximale : 18]

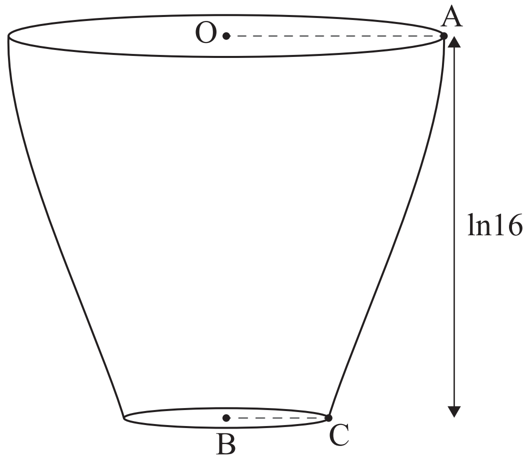
Une fonction f est définie par $f\left(x\right)=\dfrac{k\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{1+\mathrm{e}^{x}}$, où $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ et $k \in \mathbb{R}^{+}$.

La région délimitée par la représentation graphique de $y=f(x)$, l’axe des abscisses, l’axe des ordonnées et la droite $x=\ln 16$ subit une rotation de $360°$ autour de l’axe des abscisses pour former un solide de révolution.

(a) Montrez que le volume du solide formé est de $\dfrac{15k^{2}\pi}{34}$ unités cubes. [6]

Pedro souhaite fabriquer un petit bol dont le volume sera de $300\,\mathrm{cm}^{3}$ en se basant sur le résultat de la partie (a). Le modèle de Pedro est illustré dans les diagrammes suivants.





La hauteur verticale du bol, BO, est mesurée le long de l’axe des abscisses. Le rayon du dessus du bol est OA et le rayon de la base du bol est BC. Toutes les longueurs sont mesurées en cm.

(b) Trouvez la valeur de k qui satisfait aux exigences du modèle de Pedro. [2]

(c) Trouvez

(i) OA ;

(ii) BC. [4]

À des fins de conception, Pedro étudie comment le rayon de la section transversale du bol change.

(d) (i) En esquissant la représentation graphique d’une dérivée appropriée de f, trouvez où le rayon de la section transversale du bol diminue le plus rapidement.

(ii) Indiquez le rayon de la section transversale du bol en ce point. [6]

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

12. [Note maximale : 21]

Une fonction f est définie par $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Montrez que f est une fonction paire. [1]

(b) En considérant des limites, montrez que la représentation graphique de $y = f(x)$ possède une asymptote horizontale et indiquez son équation. [2]

(c) (i) Montrez que $f'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2}\left(x^2 + 1\right)}$ pour $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

(ii) En utilisant l’expression pour $f'(x)$ et le résultat $\sqrt{x^2} = |x|$, montrez que f est décroissante pour $x < 0$. [9]

Une fonction g est définie par $g(x) = \arcsin\left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$.

(d) Trouvez une expression pour $g^{-1}(x)$, en justifiant votre réponse. [5]

(e) Indiquez le domaine de g^{-1}. [1]

(f) Esquissez la représentation graphique de $y = g^{-1}(x)$, en indiquant clairement toute asymptote avec son équation et les valeurs de tout point d’intersection avec les axes. [3]

Références :

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page ne seront pas corrigées.