Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: Análisis y Enfoques
Nivel Medio
Prueba 2

Viernes 7 de mayo de 2021 (mañana)

Número de convocatoria del alumno

1 hora 30 minutos

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[80 puntos]**.

2221 – 7125

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 6]

En una cafetería, el tiempo de espera desde que uno pide un café hasta que se lo sirven depende del número de clientes que ya han pedido un café y están esperando a que se lo sirvan.

Sarah, que es cliente habitual, va a la cafetería cinco días seguidos. La siguiente tabla muestra el número de clientes (x) que han pedido un café antes que Sarah y están esperando a que se lo sirvan, y el tiempo de espera de Sarah (y minutos).

Número de clientes (x)	3	9	11	10	5
Tiempo de espera de Sarah (y)	6	10	12	11	6

La relación entre x e y se puede modelizar mediante una recta de regresión de y sobre x, de ecuación $y = ax + b$.

(a) (i) Halle el valor de a y el valor de b.

(ii) Escriba el valor del coeficiente de correlación momento-producto de Pearson (r). [3]

(b) Interprete, en el contexto de la pregunta, el valor de a que halló en el subapartado (a)(i). [1]

Sarah acude a esa cafetería unos días más tarde para pedir un café. Hay siete clientes que ya han pedido un café y están esperando a que se lo sirvan.

(c) Utilice el resultado del subapartado (a)(i) para estimar el tiempo de espera que tendrá Sarah hasta que le sirvan el café. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

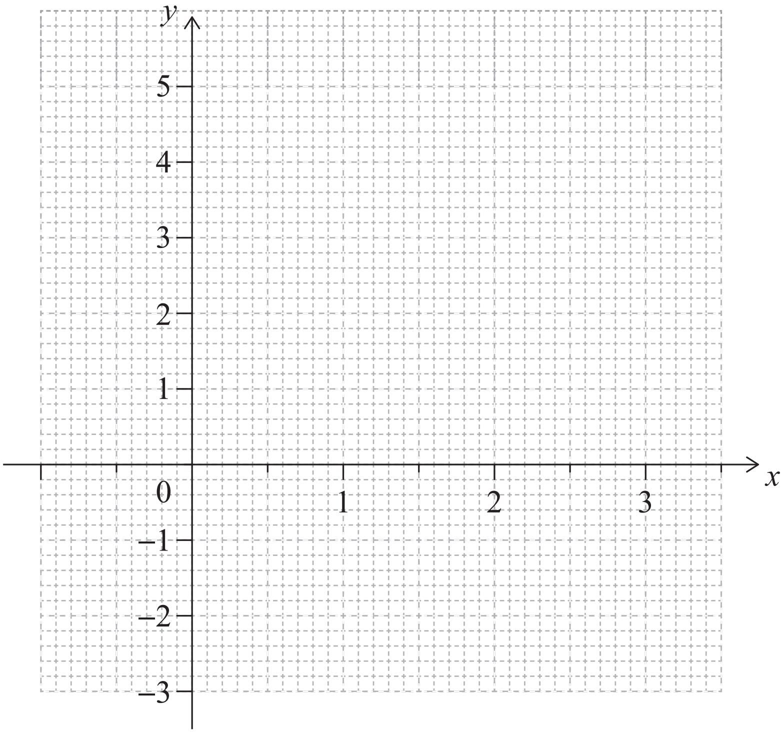
. . . .

. . . .

2. [Puntuación máxima: 5]

Sea $f(x) = 3x - 4^{0,15x^2}$ para $0 \le x \le 3$.

(a) Dibuje aproximadamente el gráfico de f en la siguiente cuadrícula. [3]



(b) Halle el valor de x para el cual $f'(x) = 0$. [2]

3. [Puntuación máxima: 5]

En una progresión aritmética el primer término es 60 y la diferencia común es $-2,5$.

(a) Sabiendo que el término k-ésimo de la progresión es cero, halle el valor de k. [2]

Sea S_n la suma de los n primeros términos de la progresión.

(b) Halle el valor máximo de S_n. [3]

4. [Puntuación máxima: 8]

En un colegio, el 70% de los alumnos practican algún deporte y el 20% de los alumnos van a teatro. El 18% de los alumnos no realizan ninguna de las dos actividades.

Se elige un alumno al azar.

(a) Halle la probabilidad de que el alumno practique algún deporte y vaya a teatro. [2]

(b) Halle la probabilidad de que el alumno vaya a teatro pero no practique ningún deporte. [2]

En ese mismo colegio, el 48% de los alumnos son chicas y el 25% de las chicas van a teatro.

Se elige un alumno al azar. Sea G el suceso “el alumno es una chica” y sea T el suceso “el alumno va a teatro”.

(c) Halle $\mathrm{P}(G \cap T)$. [2]

(d) Determine si los sucesos G y T son independientes. Justifique su respuesta. [2]

5. [Puntuación máxima: 6]

Las funciones f y g se definen para $x \in \mathbb{R}$ como $f(x) = 6x^2 - 12x + 1$ y $g(x) = -x + c$, donde $c \in \mathbb{R}$.

(a) Halle el recorrido de f. [2]

(b) Sabiendo que $(g \circ f)(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, determine el conjunto de posibles valores de c. [4]

6. [Puntuación máxima: 7]

Todas las plantas que están vivas contienen un isótopo del carbono llamado carbono-14. Cuando una planta se muere el isótopo empieza a desintegrarse, de modo que la cantidad de carbono-14 que está presente en los restos de la planta va disminuyendo. El tiempo que ha transcurrido desde la muerte de una planta dada se puede determinar midiendo la cantidad de carbono-14 que aún está presente en los restos.

La cantidad (A) de carbono-14 que está presente en una planta t años después de su muerte se puede modelizar mediante $A = A_0 e^{-kt}$, donde $t \geq 0$ y A_0, k son constantes positivas.

Por definición, una planta tiene 100 unidades de carbono-14 en el momento de su muerte.

(a) Muestre que $A_0 = 100$. [1]

Se sabe que el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de la cantidad inicial de carbono-14 es igual a 5730 años.

(b) Muestre que $k = \dfrac{\ln 2}{5730}$. [3]

(c) Halle, redondeando al múltiplo de 10 años más próximo, el tiempo que tarda en desintegrarse el 25% del carbono-14 tras la muerte de la planta. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

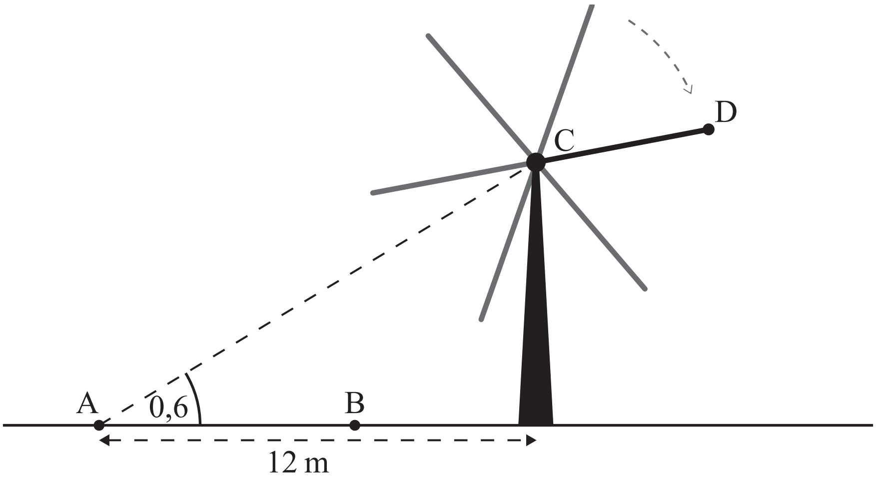
No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

7. [Puntuación máxima: 13]

Las seis palas de un molino de viento giran alrededor de un punto central C. Los puntos A y B y la base del molino están en una superficie horizontal, tal y como se muestra en la siguiente figura.



Desde el punto A, el ángulo de elevación del punto C es de $0{,}6$ radianes.

(a) Sabiendo que el punto A se encuentra a 12 metros de la base del molino de viento, halle la altura del punto C sobre la superficie. [2]

Un observador camina 7 metros desde el punto A, hasta llegar al punto B.

(b) Halle el ángulo de elevación del punto C desde el punto B. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

No escriba soluciones en esta página.

(Pregunta 7: continuación)

El observador sigue caminando hasta que se encuentra justo debajo del punto C. El observador mide $1{,}8$ metros de alto y, al ir girando las palas del molino de viento, el extremo de cada pala pasa $2{,}5$ metros por encima de su cabeza.

(c) Halle la longitud de cada pala del molino de viento. [2]

Una de las palas se pinta de un color distinto a las otras. El extremo de esta pala se rotula como punto D. La altura (h metros) del punto D sobre la superficie se puede modelizar mediante la función $h(t) = p\cos\left(\frac{3\pi}{10}t\right) + q$, donde t está en segundos y $p, q \in \mathbb{R}$.

Cuando $t = 0$, el punto D se encuentra a su máxima altura.

(d) Halle el valor de p y el valor de q. [4]

Si el observador se queda de pie justo debajo del punto C durante un minuto, el punto D pasará n veces por encima de su cabeza.

(e) Halle el valor de n. [3]

No escriba soluciones en esta página.

8. [Puntuación máxima: 15]

Los tiempos de vuelo (T minutos) entre dos ciudades dadas siguen una distribución normal de media 75 minutos y desviación típica igual a σ minutos.

(a) Sabiendo que el 2% de los tiempos de vuelo son superiores a 82 minutos, halle el valor de σ. [3]

(b) Halle la probabilidad de que un vuelo elegido al azar tenga un tiempo de vuelo de más de 80 minutos. [2]

(c) Sabiendo que un vuelo dado entre esas dos ciudades ha durado más de 80 minutos, halle la probabilidad de que haya durado menos de 82 minutos. [4]

En un día concreto, hay 64 vuelos programados entre esas dos ciudades.

(d) Halle el número esperado de vuelos que tendrán un tiempo de vuelo de más de 80 minutos. [3]

(e) Halle la probabilidad de que más de 6 de los vuelos programados en ese día concreto tengan un tiempo de vuelo de más de 80 minutos. [3]

No escriba soluciones en esta página.

9. [Puntuación máxima: 15]

En esta pregunta, todas las respuestas deben darse redondeando a cuatro cifras significativas.

En una lotería semanal que organiza un pueblo, los billetes cuestan 2 $ cada uno.

En la primera semana de esta lotería, los jugadores recibirán D $ por cada billete que tengan, con la distribución de probabilidad que se muestra en la siguiente tabla. Por ejemplo, la probabilidad de que un jugador reciba 10 $ es $0,03$. El premio gordo de la lotería en esta primera semana es de 1000 $.

d	0	2	10	50	Premio gordo
$\mathrm{P}(D=d)$	$0,85$	c	$0,03$	$0,002$	$0,0001$

(a) Halle el valor de c. [2]

(b) Determine si, en la primera semana, esta lotería es un juego justo. Justifique su respuesta. [4]

Si en esa primera semana no hay nadie que gane el premio gordo, las probabilidades seguirán siendo las mismas, pero el valor del premio gordo será de 2000 $ en la segunda semana, y el valor del premio gordo seguirá duplicándose cada semana hasta que alguien lo gane. Los valores del resto de los premios se mantendrán igual.

(c) Sabiendo que nadie gana el premio gordo y que su valor se sigue duplicando, escriba una expresión en función de n que dé el valor del premio gordo en la n-ésima semana de la lotería. [2]

La w-ésima semana es la primera semana en la que se espera que los jugadores obtengan un beneficio. Ryan sabe que si compra un billete de lotería en la semana w-ésima, su beneficio esperado será de p $.

(d) Halle el valor de p. [7]

Fuentes:

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.