Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques : analyse et approches
Niveau supérieur
Épreuve 3

Mardi 11 mai 2021 (matin)

1 heure

Instructions destinées aux candidats

- N’ouvrez pas cette épreuve avant d’y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l’intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d’examen est de **[55 points]**.

2221 – 7118

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 31]

Cette question vous demande d'explorer le comportement et certaines caractéristiques principales de la fonction $f_n(x) = x^n(a-x)^n$, où $a \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{Z}^+$.

Dans les parties (a) et (b), considérez **seulement** le cas où $a = 2$.

Considérez $f_1(x) = x(2-x)$.

(a) Esquissez la représentation graphique de $y = f_1(x)$, en indiquant les valeurs de tout point d'intersection avec les axes et les coordonnées de tout maximum ou minimum relatif. [3]

Considérez $f_n(x) = x^n(2-x)^n$, où $n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$.

(b) Utilisez votre calculatrice à écran graphique pour explorer la représentation graphique de $y = f_n(x)$ pour

- les valeurs impaires $n = 3$ et $n = 5$;
- les valeurs paires $n = 2$ et $n = 4$.

À partir de là, recopiez et complétez le tableau suivant. [6]

	Nombre de maximums relatifs	**Nombre de minimums relatifs**	**Nombre de points d'inflexion de pente nulle**
$n = 3$ et $n = 5$			
$n = 2$ et $n = 4$			

Considérez maintenant $f_n(x) = x^n(a-x)^n$, où $a \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$.

(c) Montrez que $f_n'(x) = nx^{n-1}(a-2x)(a-x)^{n-1}$. [5]

(d) Indiquez les trois solutions de l'équation $f_n'(x) = 0$. [2]

(e) Montrez que le point $\left(\dfrac{a}{2}\,;\, f_n\!\left(\dfrac{a}{2}\right)\right)$ sur la représentation graphique de $y = f_n(x)$ est toujours au-dessus de l'axe horizontal. [3]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 1)

(f) À partir de là, ou par toute autre méthode, montrez que $f_n'\left(\frac{a}{4}\right) > 0$, pour $n \in \mathbb{Z}^+$. [2]

(g) En utilisant le résultat de la partie (f) et en considérant le signe de $f_n'(-1)$, montrez que le point $(0\,;\,0)$ sur la représentation graphique de $y = f_n(x)$ est

(i) un minimum relatif pour les valeurs paires de n, où $n > 1$ et $a \in \mathbb{R}^+$; [3]

(ii) un point d'inflexion de pente nulle pour les valeurs impaires de n, où $n > 1$ et $a \in \mathbb{R}^+$. [2]

Considérez la représentation graphique de $y = x^n(a - x)^n - k$, où $n \in \mathbb{Z}^+$, $a \in \mathbb{R}^+$ et $k \in \mathbb{R}$.

(h) Indiquez les conditions sur n et k pour que l'équation $x^n(a - x)^n = k$ admette quatre solutions pour x. [5]

2. [Note maximale : 24]

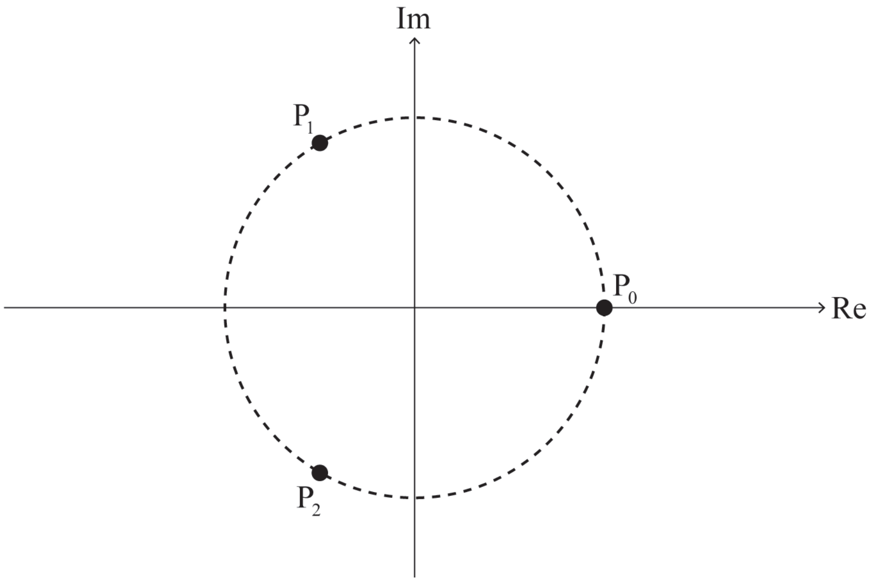
Cette question vous demande d'explorer et de prouver une propriété géométrique faisant intervenir les racines de l'équation $z^n = 1$, où $z \in \mathbb{C}$ pour des entiers n, où $n \geq 2$.

Les racines de l'équation $z^n = 1$, où $z \in \mathbb{C}$, sont 1, ω, ω^2, ..., ω^{n-1}, où $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Chaque racine peut être représentée respectivement par un point $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ sur un diagramme d'Argand.

Par exemple, les racines de l'équation $z^2 = 1$, où $z \in \mathbb{C}$, sont 1 et ω. Sur un diagramme d'Argand, la racine 1 peut être représentée par un point P_0 et la racine ω peut être représentée par un point P_1.

Considérez le cas où $n = 3$.

Les racines de l'équation $z^3 = 1$, où $z \in \mathbb{C}$, sont 1, ω et ω^2. Sur le diagramme d'Argand suivant, les points P_0, P_1 et P_2 se situent sur un cercle de rayon 1 unité dont le centre est $O(0\,;\,0)$.



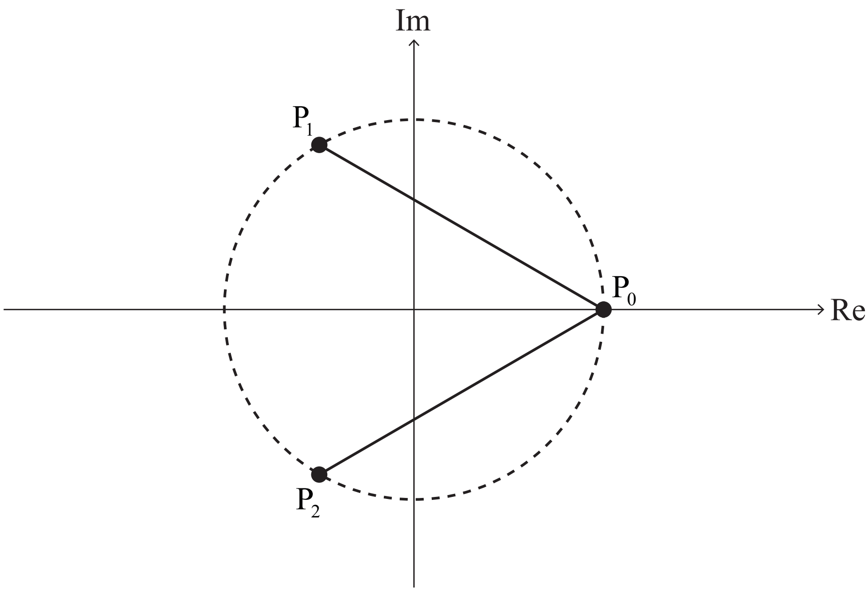
(a) (i) Montrez que $(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = \omega^3 - 1$. [2]

(ii) À partir de là, déduisez que $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. [2]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 2)

Les segments de droite $[P_0P_1]$ et $[P_0P_2]$ sont ajoutés au diagramme d'Argand de la partie (a) et sont montrés sur le diagramme d'Argand suivant.



P_0P_1 est la longueur de $[P_0P_1]$ et P_0P_2 est la longueur de $[P_0P_2]$.

(b) Montrez que $P_0P_1 \times P_0P_2 = 3$. [3]

Considérez le cas où $n = 4$.

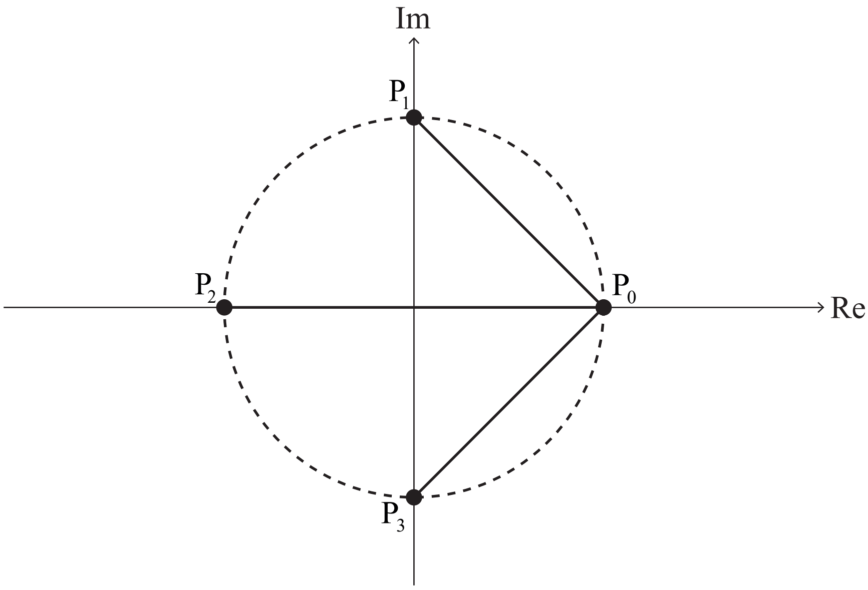
Les racines de l'équation $z^4 = 1$, où $z \in \mathbb{C}$, sont 1, ω, ω^2 et ω^3.

(c) En factorisant $z^4 - 1$, ou par toute autre méthode, déduisez que $\omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$. [2]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 2)

Sur le diagramme d'Argand suivant, les points P_0, P_1, P_2 et P_3 se situent sur un cercle de rayon 1 unité dont le centre est $\mathrm{O}(0\,;\,0)$. $[\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1]$, $[\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2]$ et $[\mathrm{P}_0\mathrm{P}_3]$ sont des segments de droite.



(d) Montrez que $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 \times \mathrm{P}_0\mathrm{P}_2 \times \mathrm{P}_0\mathrm{P}_3 = 4$. [4]

Pour le cas où $n = 5$, l'équation $z^5 = 1$, où $z \in \mathbb{C}$, possède les racines 1, ω, ω^2, ω^3 et ω^4.

Il peut être démontré que $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 \times \mathrm{P}_0\mathrm{P}_2 \times \mathrm{P}_0\mathrm{P}_3 \times \mathrm{P}_0\mathrm{P}_4 = 5$.

Considérez maintenant le cas général pour des valeurs entières de n, où $n \geq 2$.

Les racines de l'équation $z^n = 1$, où $z \in \mathbb{C}$, sont 1, ω, ω^2, ..., ω^{n-1}.
Sur un diagramme d'Argand, ces racines peuvent être représentées respectivement par les points P_0, P_1, P_2, ..., P_{n-1}, où $[\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1]$, $[\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2]$, ..., $[\mathrm{P}_0\mathrm{P}_{n-1}]$ sont des segments de droite.
Les racines se situent sur un cercle de rayon 1 unité dont le centre est $\mathrm{O}(0\,;\,0)$.

(e) Suggérez une valeur pour $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 \times \mathrm{P}_0\mathrm{P}_2 \times ... \times \mathrm{P}_0\mathrm{P}_{n-1}$. [1]

$\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$ peut être exprimé comme $|1 - \omega|$.

(f) (i) Écrivez des expressions pour $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2$ et $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_3$ en fonction de ω. [2]

(ii) À partir de là, écrivez une expression pour $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_{n-1}$ en fonction de n et ω. [1]

Considérez $z^n - 1 = (z - 1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1)$, où $z \in \mathbb{C}$.

(g) (i) Exprimez $z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1$ comme un produit de facteurs linéaires sur l'ensemble $\mathbb{C}$. [3]

(ii) À partir de là, en utilisant les résultats de la partie (g)(i) et de la partie (f), ou par toute autre méthode, prouvez votre résultat suggéré à la partie (e). [4]

Références :