Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: Análisis y Enfoques
Nivel Superior
Prueba 3

Martes 11 de mayo de 2021 (mañana)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[55 puntos]**.

2221 – 7123

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 31]

En esta pregunta le pediremos que analice el comportamiento y algunas características clave de la función $f_n(x) = x^n(a-x)^n$, donde $a \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{Z}^+$.

En los apartados (a) y (b), considere **únicamente** el caso en el que $a = 2$.

Considere $f_1(x) = x(2-x)$.

(a) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f_1(x)$, e indique las coordenadas de todas las intersecciones con los ejes y de todos los máximos y mínimos locales que haya. [3]

Considere $f_n(x) = x^n(2-x)^n$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$.

(b) Utilice la calculadora de pantalla gráfica para analizar el gráfico de $y = f_n(x)$ correspondiente a:

- Los valores impares $n = 3$ y $n = 5$
- Los valores pares $n = 2$ y $n = 4$

A partir de lo anterior, copie y complete la siguiente tabla. [6]

	Número de máximos locales	**Número de mínimos locales**	**Número de puntos de inflexión con pendiente cero**
$n = 3$ y $n = 5$			
$n = 2$ y $n = 4$			

Ahora considere $f_n(x) = x^n(a-x)^n$, donde $a \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$.

(c) Muestre que $f_n'(x) = nx^{n-1}(a-2x)(a-x)^{n-1}$. [5]

(d) Indique las tres soluciones de la ecuación $f_n'(x) = 0$. [2]

(e) Muestre que el punto $\left(\frac{a}{2}, f_n\left(\frac{a}{2}\right)\right)$ del gráfico de $y = f_n(x)$ siempre está por encima del eje horizontal. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

(f) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, muestre que $f_n'\left(\frac{a}{4}\right) > 0$, para $n \in \mathbb{Z}^+$. [2]

(g) Utilizando el resultado del apartado (f) y considerando cuál es el signo de $f_n'(-1)$, muestre que el punto $(0, 0)$ del gráfico de $y = f_n(x)$ es:

(i) Un mínimo local para valores pares de n, donde $n > 1$ y $a \in \mathbb{R}^+$ [3]

(ii) Un punto de inflexión con pendiente cero para valores impares de n, donde $n > 1$ y $a \in \mathbb{R}^+$ [2]

Considere el gráfico de $y = x^n(a - x)^n - k$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$, $a \in \mathbb{R}^+$ y $k \in \mathbb{R}$.

(h) Indique las condiciones que han de cumplir n y k para que la ecuación $x^n(a - x)^n = k$ tenga cuatro soluciones para x. [5]

2. [Puntuación máxima: 24]

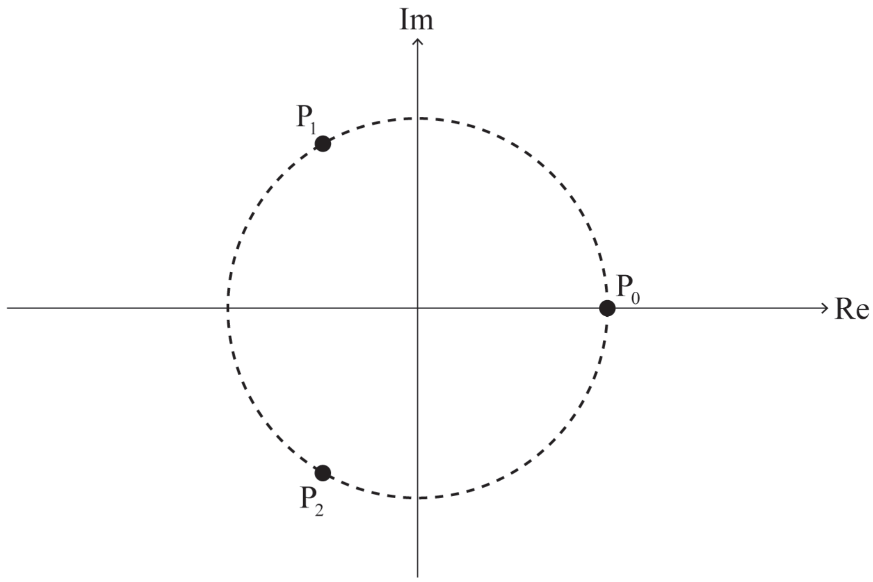
En esta pregunta le pediremos que investigue y demuestre una propiedad geométrica que cumplen las raíces de la ecuación $z^n = 1$, donde $z \in \mathbb{C}$, para los valores enteros de n, donde $n \geq 2$.

Las raíces de la ecuación $z^n = 1$, donde $z \in \mathbb{C}$, son 1, ω, ω^2, ..., ω^{n-1}, donde $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}}$. Estas raíces se pueden representar en un diagrama de Argand mediante puntos $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_{n-1}$, respectivamente.

Por ejemplo, las raíces de la ecuación $z^2 = 1$, donde $z \in \mathbb{C}$, son 1 y ω. En un diagrama de Argand, la raíz 1 se puede representar mediante el punto P_0 y la raíz ω se puede representar mediante el punto P_1.

Considere ahora el caso $n = 3$.

Las raíces de la ecuación $z^3 = 1$, donde $z \in \mathbb{C}$, son 1, ω y ω^2. En el siguiente diagrama de Argand, los puntos P_0, P_1 y P_2 están sobre la circunferencia de radio 1 unidad con centro en $\mathrm{O}(0, 0)$.



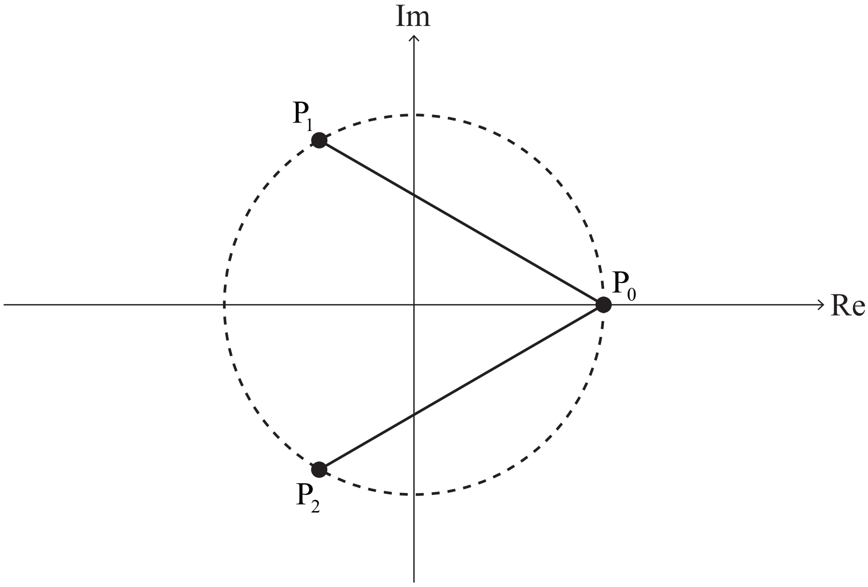
(a) (i) Muestre que $(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = \omega^3 - 1$. [2]

(ii) A partir de lo anterior, deduzca que $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 2: continuación)

Ahora añadimos los segmentos de recta $[P_0P_1]$ y $[P_0P_2]$ al diagrama de Argand del apartado (a); el resultado se muestra en el siguiente diagrama de Argand.



P_0P_1 es la longitud de $[P_0P_1]$ y P_0P_2 es la longitud de $[P_0P_2]$.

(b) Muestre que $P_0P_1 \times P_0P_2 = 3$. [3]

Considere ahora el caso $n = 4$.

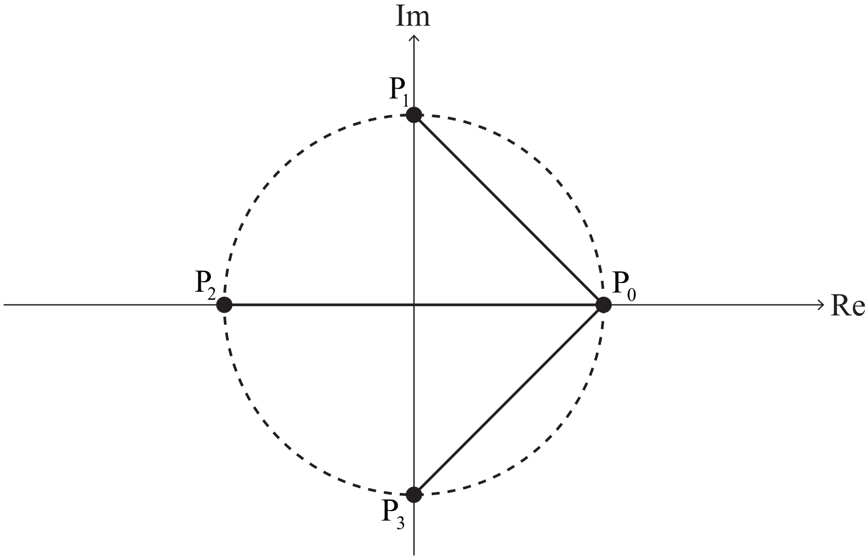
Las raíces de la ecuación $z^4 = 1$, donde $z \in \mathbb{C}$, son 1, ω, ω^2 y ω^3.

(c) Descomponiendo en factores $z^4 - 1$, o de cualquier otro modo, deduzca que $\omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 2: continuación)

En el siguiente diagrama de Argand, los puntos P_0, P_1, P_2 y P_3 están sobre la circunferencia de radio 1 unidad con centro en $\mathrm{O}(0, 0)$. $[\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1]$, $[\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2]$ y $[\mathrm{P}_0\mathrm{P}_3]$ son segmentos de recta.



(d) Muestre que $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 \times \mathrm{P}_0\mathrm{P}_2 \times \mathrm{P}_0\mathrm{P}_3 = 4$. [4]

Para el caso $n = 5$, la ecuación $z^5 = 1$, donde $z \in \mathbb{C}$, tiene por raíces 1, ω, ω^2, ω^3 y ω^4.

Se puede demostrar que $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 \times \mathrm{P}_0\mathrm{P}_2 \times \mathrm{P}_0\mathrm{P}_3 \times \mathrm{P}_0\mathrm{P}_4 = 5$.

Considere ahora el caso general para valores enteros de n, donde $n \geq 2$.

Las raíces de la ecuación $z^n = 1$, donde $z \in \mathbb{C}$, son 1, ω, ω^2, ..., ω^{n-1}. En un diagrama de Argand, estas raíces se pueden representar mediante los puntos P_0, P_1, P_2, ..., P_{n-1} respectivamente, donde $[\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1]$, $[\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2]$, ..., $[\mathrm{P}_0\mathrm{P}_{n-1}]$ son segmentos de recta. Las raíces están sobre la circunferencia de radio 1 unidad con centro en $\mathrm{O}(0, 0)$.

(e) Sugiera un valor para $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 \times \mathrm{P}_0\mathrm{P}_2 \times \ldots \times \mathrm{P}_0\mathrm{P}_{n-1}$. [1]

$\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$ se puede expresar como $|1 - \omega|$.

(f) (i) Escriba expresiones para $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2$ y $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_3$ en función de ω. [2]

(ii) A partir de lo anterior, escriba una expresión para $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_{n-1}$ en función de n y de ω. [1]

Considere $z^n - 1 = (z - 1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1)$, donde $z \in \mathbb{C}$.

(g) (i) Exprese $z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1$ como un producto de factores lineales sobre el conjunto $\mathbb{C}$. [3]

(ii) A partir de lo anterior, y utilizando los resultados del subapartado (g)(i) y del apartado (f), o de cualquier otro modo, demuestre el resultado que ha sugerido en el apartado (e). [4]

Fuentes: