

© International Baccalaureate Organization 2021

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2021

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2021

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

## Matemáticas: Análisis y Enfoques

### Nivel Superior

### Prueba 3

Martes 11 de mayo de 2021 (mañana)

1 hora

---

#### Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[55 puntos]**.

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 31]

**En esta pregunta le pediremos que analice el comportamiento y algunas características clave de la función  $f_n(x) = x^n(a - x)^n$ , donde  $a \in \mathbb{R}^+$  y  $n \in \mathbb{Z}^+$ .**

En los apartados (a) y (b), considere **únicamente** el caso en el que  $a = 2$ .

Considere  $f_1(x) = x(2 - x)$ .

(a) Dibuje aproximadamente el gráfico de  $y = f_1(x)$ , e indique las coordenadas de todas las intersecciones con los ejes y de todos los máximos y mínimos locales que haya. [3]

Considere  $f_n(x) = x^n(2 - x)^n$ , donde  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $n > 1$ .

(b) Utilice la calculadora de pantalla gráfica para analizar el gráfico de  $y = f_n(x)$  correspondiente a:

- Los valores impares  $n = 3$  y  $n = 5$
- Los valores pares  $n = 2$  y  $n = 4$

A partir de lo anterior, copie y complete la siguiente tabla. [6]

	Número de máximos locales	Número de mínimos locales	Número de puntos de inflexión con pendiente cero
$n = 3$ y $n = 5$			
$n = 2$ y $n = 4$			

Ahora considere  $f_n(x) = x^n(a - x)^n$ , donde  $a \in \mathbb{R}^+$  y  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $n > 1$ .

(c) Muestre que  $f'_n(x) = nx^{n-1}(a - 2x)(a - x)^{n-1}$ . [5]

(d) Indique las tres soluciones de la ecuación  $f'_n(x) = 0$ . [2]

(e) Muestre que el punto  $\left(\frac{a}{2}, f_n\left(\frac{a}{2}\right)\right)$  del gráfico de  $y = f_n(x)$  siempre está por encima del eje horizontal. [3]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 1: continuación)**

(f) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, muestre que  $f_n' \left( \frac{a}{4} \right) > 0$ , para  $n \in \mathbb{Z}^+$ . [2]

(g) Utilizando el resultado del apartado (f) y considerando cuál es el signo de  $f_n'(-1)$ , muestre que el punto  $(0, 0)$  del gráfico de  $y = f_n(x)$  es:

(i) Un mínimo local para valores pares de  $n$ , donde  $n > 1$  y  $a \in \mathbb{R}^+$  [3]

(ii) Un punto de inflexión con pendiente cero para valores impares de  $n$ , donde  $n > 1$  y  $a \in \mathbb{R}^+$  [2]

Considere el gráfico de  $y = x^n(a - x)^n - k$ , donde  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$  y  $k \in \mathbb{R}$ .

(h) Indique las condiciones que han de cumplir  $n$  y  $k$  para que la ecuación  $x^n(a - x)^n = k$  tenga cuatro soluciones para  $x$ . [5]

2. [Puntuación máxima: 24]

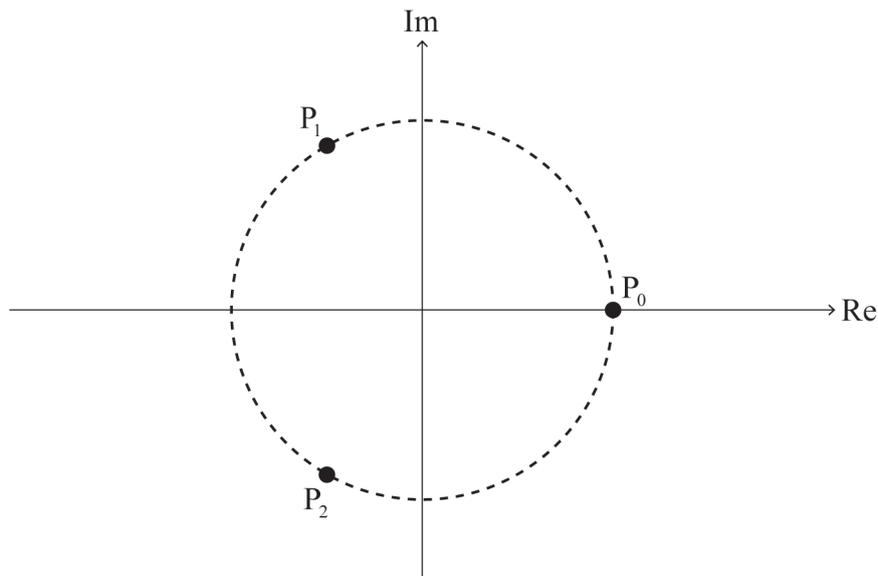
**En esta pregunta le pediremos que investigue y demuestre una propiedad geométrica que cumplen las raíces de la ecuación  $z^n = 1$ , donde  $z \in \mathbb{C}$ , para los valores enteros de  $n$ , donde  $n \geq 2$ .**

Las raíces de la ecuación  $z^n = 1$ , donde  $z \in \mathbb{C}$ , son  $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ , donde  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ . Estas raíces se pueden representar en un diagrama de Argand mediante puntos  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ , respectivamente.

Por ejemplo, las raíces de la ecuación  $z^2 = 1$ , donde  $z \in \mathbb{C}$ , son  $1$  y  $\omega$ . En un diagrama de Argand, la raíz  $1$  se puede representar mediante el punto  $P_0$  y la raíz  $\omega$  se puede representar mediante el punto  $P_1$ .

Considere ahora el caso  $n = 3$ .

Las raíces de la ecuación  $z^3 = 1$ , donde  $z \in \mathbb{C}$ , son  $1, \omega$  y  $\omega^2$ . En el siguiente diagrama de Argand, los puntos  $P_0, P_1$  y  $P_2$  están sobre la circunferencia de radio 1 unidad con centro en  $O(0, 0)$ .

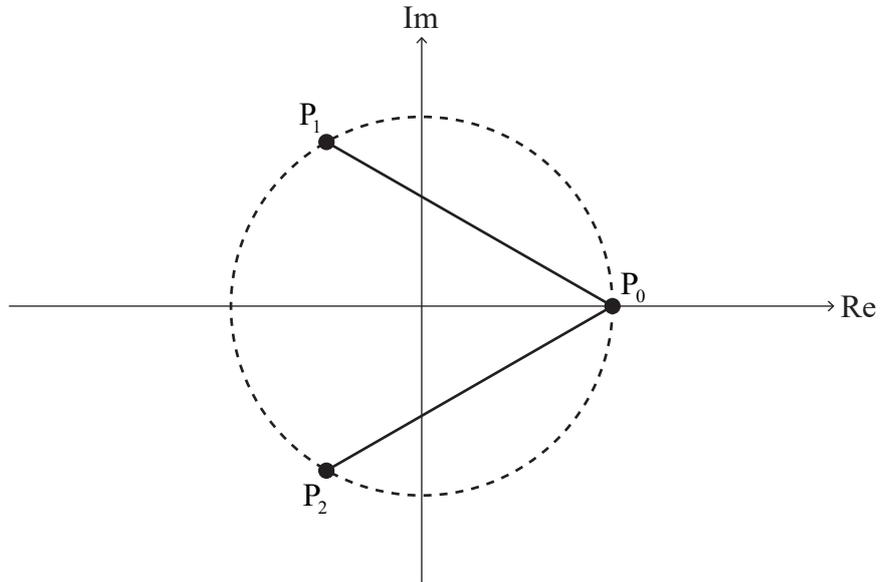


- (a) (i) Muestre que  $(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = \omega^3 - 1$ . [2]
- (ii) A partir de lo anterior, deduzca que  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ . [2]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 2: continuación)**

Ahora añadimos los segmentos de recta  $[P_0P_1]$  y  $[P_0P_2]$  al diagrama de Argand del apartado (a); el resultado se muestra en el siguiente diagrama de Argand.



$P_0P_1$  es la longitud de  $[P_0P_1]$  y  $P_0P_2$  es la longitud de  $[P_0P_2]$ .

(b) Muestre que  $P_0P_1 \times P_0P_2 = 3$ . [3]

Considere ahora el caso  $n = 4$ .

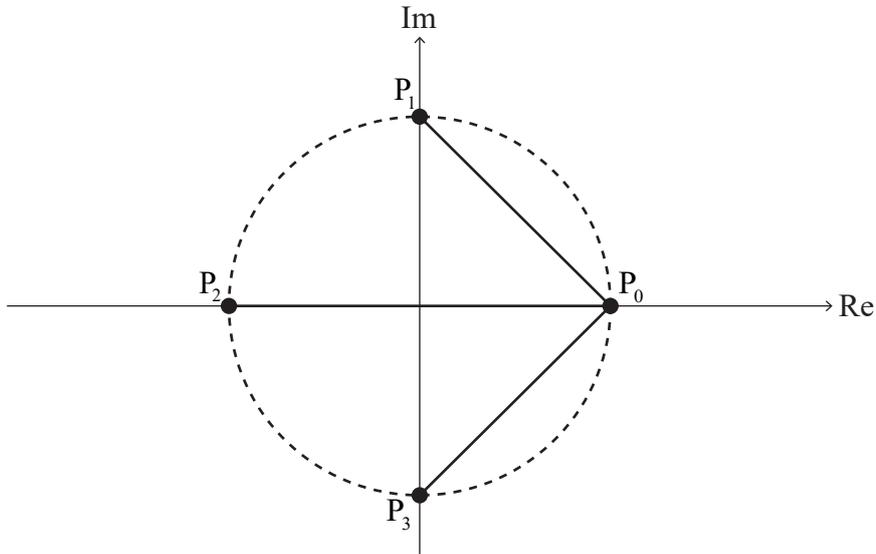
Las raíces de la ecuación  $z^4 = 1$ , donde  $z \in \mathbb{C}$ , son  $1, \omega, \omega^2$  y  $\omega^3$ .

(c) Descomponiendo en factores  $z^4 - 1$ , o de cualquier otro modo, deduzca que  $\omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$ . [2]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 2: continuación)**

En el siguiente diagrama de Argand, los puntos  $P_0, P_1, P_2$  y  $P_3$  están sobre la circunferencia de radio 1 unidad con centro en  $O(0, 0)$ .  $[P_0P_1]$ ,  $[P_0P_2]$  y  $[P_0P_3]$  son segmentos de recta.



(d) Muestre que  $P_0P_1 \times P_0P_2 \times P_0P_3 = 4$ . [4]

Para el caso  $n = 5$ , la ecuación  $z^5 = 1$ , donde  $z \in \mathbb{C}$ , tiene por raíces  $1, \omega, \omega^2, \omega^3$  y  $\omega^4$ .

Se puede demostrar que  $P_0P_1 \times P_0P_2 \times P_0P_3 \times P_0P_4 = 5$ .

Considere ahora el caso general para valores enteros de  $n$ , donde  $n \geq 2$ .

Las raíces de la ecuación  $z^n = 1$ , donde  $z \in \mathbb{C}$ , son  $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ . En un diagrama de Argand, estas raíces se pueden representar mediante los puntos  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  respectivamente, donde  $[P_0P_1], [P_0P_2], \dots, [P_0P_{n-1}]$  son segmentos de recta. Las raíces están sobre la circunferencia de radio 1 unidad con centro en  $O(0, 0)$ .

(e) Sugiera un valor para  $P_0P_1 \times P_0P_2 \times \dots \times P_0P_{n-1}$ . [1]

$P_0P_1$  se puede expresar como  $|1 - \omega|$ .

(f) (i) Escriba expresiones para  $P_0P_2$  y  $P_0P_3$  en función de  $\omega$ . [2]

(ii) A partir de lo anterior, escriba una expresión para  $P_0P_{n-1}$  en función de  $n$  y de  $\omega$ . [1]

Considere  $z^n - 1 = (z - 1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1)$ , donde  $z \in \mathbb{C}$ .

(g) (i) Exprese  $z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1$  como un producto de factores lineales sobre el conjunto  $\mathbb{C}$ . [3]

(ii) A partir de lo anterior, y utilizando los resultados del subapartado (g)(i) y del apartado (f), o de cualquier otro modo, demuestre el resultado que ha sugerido en el apartado (e). [4]

Fuentes: