Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques : applications et interprétation
Niveau supérieur
Épreuve 2

Vendredi 7 mai 2021 (matin)

2 heures

Instructions destinées aux candidats

- N’ouvrez pas cette épreuve avant d’y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l’intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour le cours de mathématiques : applications et interprétation** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d’examen est de **[110 points]**.

2221 – 7217

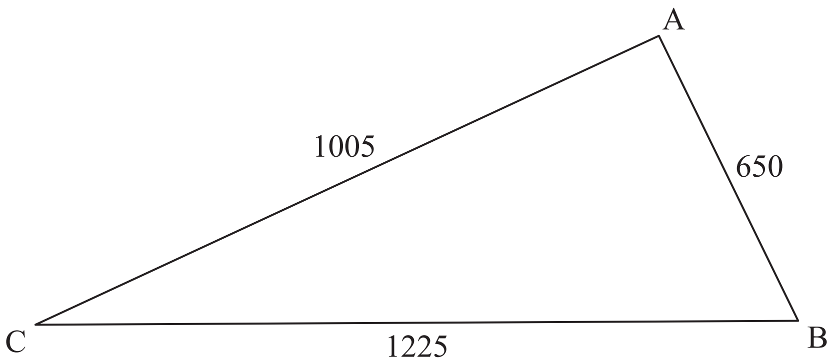
9 pages

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 15]

Un agriculteur possède un champ ayant la forme d'un triangle ABC tel que $\mathrm{AB} = 650\,\mathrm{m}$, $\mathrm{AC} = 1005\,\mathrm{m}$ et $\mathrm{BC} = 1225\,\mathrm{m}$.

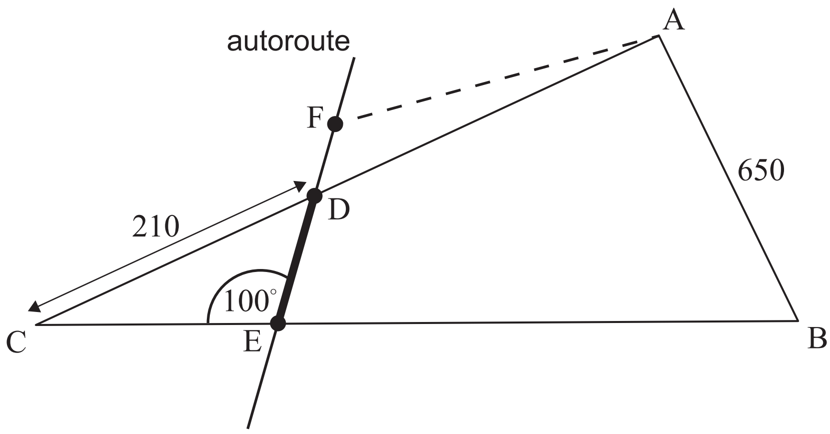
la figure n'est pas à l'échelle



(a) Trouvez la mesure de $\mathrm{A\hat{C}B}$. [3]

La municipalité envisage de construire une autoroute qui coupera les frontières du champ aux points D et E, où $\mathrm{DC} = 210\,\mathrm{m}$ et $\mathrm{C\hat{E}D} = 100^{\circ}$, tel que montré dans le diagramme ci-dessous.

la figure n'est pas à l'échelle



(b) Trouvez DE. [3]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 1)

La municipalité souhaite également construire un parc de stationnement. On demande à l'agriculteur d'échanger la partie du champ représentée par le triangle DCE. En retour, l'agriculteur obtiendra un triangle ADF de surface égale, où F se trouve sur la même droite que D et E, comme indiqué dans le diagramme précédent.

(c) Trouvez l'aire du triangle DCE. [5]

(d) Estimez DF. Vous pouvez supposer que la largeur de l'autoroute est nulle. [4]

2. [Note maximale : 16]

On sait que les poids des chats persans mâles sont normalement distribués avec une moyenne de $6{,}1\,\mathrm{kg}$ et une variance de $0{,}5^2\,\mathrm{kg}^2$.

(a) Esquissez un diagramme montrant les informations ci-dessus. [2]

(b) Trouvez la proportion de chats persans mâles qui pèsent entre $5{,}5\,\mathrm{kg}$ et $6{,}5\,\mathrm{kg}$. [2]

Un groupe de 80 chats persans mâles est sélectionné dans cette population.

(c) Déterminez le nombre espéré de chats dans ce groupe ayant un poids inférieur à $5{,}3\,\mathrm{kg}$. [3]

Les chats mâles sont maintenant rejoints par 80 chats persans femelles. Les chats femelles sont sélectionnés dans une population dont les poids sont normalement distribués avec une moyenne de $4{,}5\,\mathrm{kg}$ et un écart type de $0{,}45\,\mathrm{kg}$.

(d) Dix chats femelles sont choisis au hasard.

(i) Trouvez la probabilité qu'exactement un de ces chats femelles pèse plus de $4{,}62\,\mathrm{kg}$.

(ii) Soit N le nombre de chats pesant plus de $4{,}62\,\mathrm{kg}$.

Trouvez la variance de N. [5]

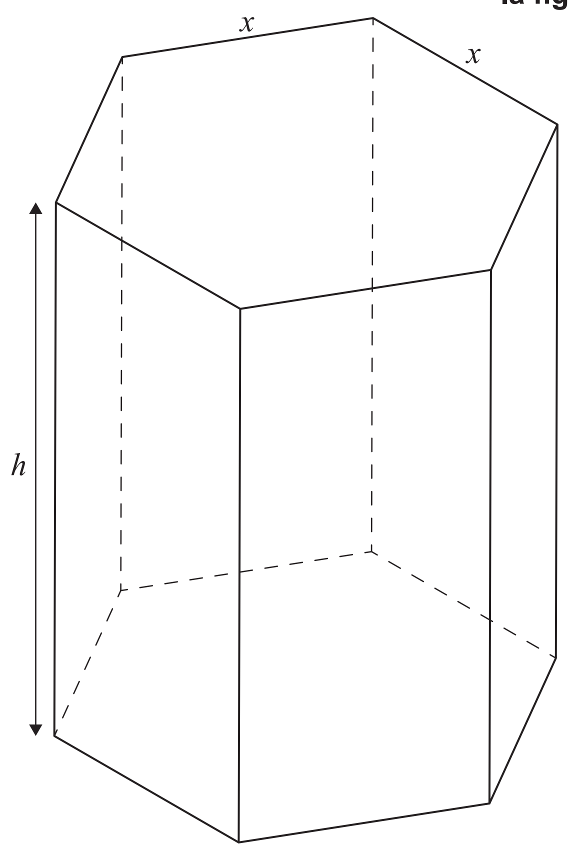
Un chat est sélectionné au hasard parmi les 160 chats.

(e) Trouvez la probabilité que le chat soit une femelle, sachant que son poids est supérieur à $4{,}7\,\mathrm{kg}$. [4]

3. [Note maximale : 15]

On fabrique une boîte de chocolats creuse ayant la forme d'un prisme droit avec une base hexagonale régulière. La hauteur du prisme est de $h\,\text{cm}$, et le dessus et la base du prisme ont des côtés de longueur $x\,\text{cm}$.

la figure n'est pas à l'échelle



(a) Sachant que $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, montrez que l'aire de la base de la boîte est égale à $\frac{3\sqrt{3}x^2}{2}$. [2]

(b) Sachant que l'aire totale de la surface externe de la boîte est de $1200\,\text{cm}^2$, montrez que le volume de la boîte peut être exprimé comme $V = 300\sqrt{3}\,x - \frac{9}{4}x^3$. [5]

(c) Esquissez la représentation graphique de $V = 300\sqrt{3}\,x - \frac{9}{4}x^3$, pour $0 \le x \le 16$. [2]

(d) Trouvez une expression pour $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$. [2]

(e) Trouvez la valeur de x qui rend le volume de la boîte maximal. [2]

(f) À partir de là, ou par toute autre méthode, trouvez le volume maximal possible de la boîte. [2]

4. [Note maximale : 18]

Dans un petit village, il y a deux cabinets médicaux, l'un appartenant au docteur Black et l'autre appartenant au docteur Green. On a remarqué qu'à la fin de chaque année, $3{,}5\,\%$ des patients du docteur Black passent au cabinet médical du docteur Green et $5\,\%$ des patients du docteur Green passent au cabinet médical du docteur Black. Toutes les autres pertes ou gains de patients réalisés par les cabinets médicaux peuvent être ignorés.

Au début d'une année donnée, on a remarqué que le docteur Black avait 2100 patients, alors que le docteur Green en avait 3500.

(a) Écrivez une matrice de transition $\boldsymbol{T}$ indiquant le mouvement de population annuel entre les cabinets médicaux. [2]

(b) Trouvez une prédiction du ratio du nombre de patients qu'aura le docteur Black par rapport à ceux qu'aura le docteur Green, après deux ans. [2]

(c) Trouvez une matrice $\boldsymbol{P}$, ayant des éléments entiers, telle que $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{PDP}^{-1}$, où $\boldsymbol{D}$ est une matrice diagonale. [6]

(d) À partir de là, montrez que la matrice de transition à long terme, $\boldsymbol{T}^{\infty}$ est donnée par

$$\boldsymbol{T}^{\infty} = \begin{pmatrix} \frac{10}{17} & \frac{10}{17} \\ \frac{7}{17} & \frac{7}{17} \end{pmatrix}.$$ [6]

(e) À partir de là, ou par toute autre méthode, déterminez le ratio espéré du nombre de patients qu'aurait le docteur Black par rapport à ceux qu'aurait le docteur Green, à long terme. [2]

5. [Note maximale : 14]

Hank installe une mangeoire pour oiseaux dans son jardin afin de fournir de la nourriture aux oiseaux locaux. Hank remarque qu'un oiseau spécifique, une grande pie, vient lui rendre visite plusieurs fois par mois et il le nomme Bill. Hank modélise le nombre de fois par mois que Bill visite son jardin par une distribution de Poisson avec une moyenne de $3,1$.

(a) En utilisant le modèle de Hank, trouvez la probabilité que Bill visite le jardin exactement quatre fois au cours d'un mois donné. [1]

(b) Sur une période de 3 mois consécutifs, trouvez la probabilité que Bill visite le jardin :

(i) exactement 12 fois.

(ii) au cours du premier et du troisième mois seulement. [5]

(c) Trouvez la probabilité que sur une période de 12 mois, il y ait exactement 3 mois où Bill ne visite pas le jardin. [4]

Après la première année, un certain nombre de bébés pies commencent à visiter le jardin de Hank. On peut supposer que chacun de ces bébés pies visite le jardin aléatoirement et de façon indépendante, et que le nombre de fois par mois que chaque bébé pie visite le jardin est modélisé par une distribution de Poisson avec une moyenne de $2,1$.

(d) Déterminez le plus petit nombre de pies nécessaires, incluant Bill, pour que la probabilité que le jardin de Hank reçoive au moins 30 visites de pies par mois soit supérieure à $0,2$. [4]

6. [Note maximale : 15]

Une particule P se déplace le long de l'axe des abscisses. La vitesse algébrique de P est $v\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ au temps t secondes, où $v = -2t^2 + 16t - 24$ pour $t \geq 0$.

(a) Trouvez les instants où P est au repos. [2]

(b) Trouvez la norme de l'accélération de la particule à 6 secondes. [4]

(c) Trouvez la plus grande vitesse de P dans l'intervalle $0 \leq t \leq 6$. [2]

(d) La particule part de l'origine O. Trouvez une expression pour le déplacement de P à partir de O au temps t secondes. [4]

(e) Trouvez la distance totale parcourue par P dans l'intervalle $0 \leq t \leq 4$. [3]

7. [Note maximale : 17]

Considérez le système d'équations différentielles couplées suivant :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -4x$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3x - 2y$$

(a) Trouvez les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants de la matrice

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$ [6]

(b) À partir de là, écrivez la solution générale du système. [2]

(c) Déterminez, en justifiant votre réponse, si le point d'équilibre $(0\ ;\ 0)$ est stable ou instable. [2]

(d) Trouvez la valeur de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

(i) au point $(4\ ;\ 0)$.

(ii) au point $(-4\ ;\ 0)$. [3]

(e) Esquissez un portrait de phase pour la solution générale du système d'équations différentielles couplées pour $-6 \le x \le 6$, $-6 \le y \le 6$. [4]

Références :