UNIVERSITE OUAGA I
Pr Joseph KI-ZERBO
....
Office du Baccalauréat
Séries C-E

Année 2019
Session Normale
Epreuve du ~~1er~~ 2nd tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 6

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages

(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

Exercice I (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. $M(t)$ est un point mobile de coordonnées $x(t)$; $y(t)$ définies par : $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\cos(2t) - \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$; $(t \in \mathbb{R})$

(C) est la courbe décrite par la trajectoire de $M(t)$.

1) a) Montrer que les fonctions $x : t \longmapsto x(t)$ et $y : t \longmapsto y(t)$ sont périodiques de période T que l'on précisera.(0,5 point)

b) Que peut-on dire des positions des points $M(t)$ et $M(t+T)$? (0,5 point)

c) Calculer $x(-t)$ et $y(-t)$ et en déduire les positions des points $M(-t)$ et $M(t)$. (0,5 point)

d) Justifier que l'on peut réduire le domaine d'étude à $[0;\pi]$. (0,5 point)

2) Soit la courbe (C') définie par :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\cos 2t - \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} ; t \in [0,\pi].$$

a) Comment obtient-on (C) à partir de (C') ? (0,5 point)

b) Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$ et dresser le tableau de variation des fonctions x et y. (0,5 point)

c) Déterminer les coordonnées des points en lesquels la tangente est verticale. (0,5 point)

d) Déterminer les coordonnées des points en lesquels la tangente est horizontale. (0,5 point)

e) Tracer avec soin la courbe (C'). (0,5 point)

3) Tracer la courbe (C). (0,5 point)

On donne : $\sqrt{3} = 1,7$

Exercice II (3 points)

Soit $\theta \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + (2\sin\theta)z + 1 = 0$ (e_0). (0,5 point)

b) Déterminer le module et un argument de chacune des racines de (e_0). (0,5 point)

2) On considère l'équation différentielle

$y'' + 2\sin\theta y' + y = x\cos\theta + 2\sin\theta$ (e_1)

a) On pose $y_0(x) = ax + b$; avec a et b des nombres réels.

Déterminer les réels a et b tels que y_0 soit solution de (e_1). (0,5 point)

b) Montrer qu'une fonction y est solution de (e_1) si et seulement si $y - y_0$ est solution d'une équation différentielle homogène du second ordre que l'on résoudra. (1 point)

3) Déterminer toutes les solutions de (e_1). (0,5 point)

Problème (12 points)

Partie I : (7,5 points)

A tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $f_n(x) = (x-\frac{1}{2})^n \ln(x+\frac{1}{2})$.

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ unité graphique 2 cm ; On notera f_n' la dérivée de f_n.

1) Soit g_n la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par

$$g_n(x) = n\ln(x+\tfrac{1}{2}) + \frac{2x-1}{2x+1}.$$

a) Etudier les variations de la fonction g_n. (0,5 point)

b) Calculer $g_n(\frac{1}{2})$ et déterminer le signe de g_n sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$. (1 point)

2) a) Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$, montrer que :

(i) $f_1'(x) = g_1(x)$. (0,25 point)

(ii) $f_n'(x) = (x-\frac{1}{2})^{n-1} g_n(x)$. (0,25 point)

b) On suppose que n est impair. Etudier les variations de f_n et dresser son tableau de variation. (1 point)

c) On suppose que n est pair. Etudier les variations de f_n et dresser son tableau de variation. (1 point)

3) On note T la translation du plan de vecteur $-\dfrac{1}{2}\vec{i}$. On note (E_n) l'image de (C_n) par la translation T.

Déterminer une équation cartésienne de (E_n). (1 point)

4) a) Etudier les positions relatives de (C_1) et (C_2). (0,5 point)

b) Tracer les courbes (C_1) et (C_2) sur une même figure. (2 points)

Partie II (4,5 points)

On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_n = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (x-\tfrac{1}{2})^n \ln(x+\tfrac{1}{2})dx.$$

1) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{\ln 2}{n+1}$. (1 point)

En déduire la limite de la suite (v_n)

2) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$v_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2^{-n}}{n+1}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{(2x-1)^{n+1}}{2x+1}dx, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \text{ (1 point)}$$

3) On pose pour $n \geq 1$ et $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$,

$$s_n(x) = 1 - (x-\tfrac{1}{2}) + (x-\tfrac{1}{2})^2 + ... + (-1)^n(x-\tfrac{1}{2})^n.$$

a) Montrer que : $s_n(x) = \dfrac{2}{2x+1} + (-\frac{1}{2})^n \dfrac{(2x-1)^{n+1}}{2x+1}$. (1 point)

b) Déduire que : $v_n = \dfrac{\ln 2}{n+1} - \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1}\left[\ln 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right]$. (1,5 point)

On donne $\ln 2 \simeq 0,69$, $\ln 3 \simeq 1,1$, $\ln 5 \simeq 1,61$.

Fin