

Série D

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Cette épreuve comporte deux (2) pages.

Exercice 1 (4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) unité graphique 1 cm.

Soit P le polynôme défini sur \mathbb{C} pour tout z par : $P(z) = z^3 - 3z^2 + (3i + 3)z - 6 + 2i$.

- 1) Calculer $P(-i)$; puis en déduire une factorisation de $P(z)$. (1 point)
- 2) a) Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $P(z) = 0$. (0,5 point)
b) Soient les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -i$; $z_B = 2i$ et $z_C = 3 - i$. Placer les points A, B et C dans le repère. (0,5 point)
c) Calculer $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$; puis interpréter géométriquement le module et un argument de ce quotient. En déduire la nature du triangle ABC . (1 point)
- 3) Soit D l'image de C par la translation de vecteur \overrightarrow{AB} .
a) Calculer l'affixe du point D . (0,5 point)
b) Donner la nature exacte du quadrilatère $ABDC$. (0,5 point)

Exercice 2 (4 points)

Une urne contient cinq boules portant le numéro 2 ; quatre boules portant le numéro 3 et trois boules portant le numéro 4.

On tire simultanément trois boules de l'urne. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

- 1) Déterminer les probabilités des événements suivants :
A : «Tirer au moins une boule portant le numéro 3». (0,25 point)
B : «Tirer trois boules portant des numéros tous différents». (0,25 point)
C : «Tirer trois boules portant le même numéro». (0,25 point)
D : «Tirer trois boules dont exactement deux portent le même numéro». (0,25 point)
- 2) Soit X la variable aléatoire égale à la somme des numéros marqués sur les trois boules tirées.
a) Quelles sont les valeurs prises par X . (0,5 point)
b) Déterminer la loi de probabilité de X . (1 point)
c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X . (0,5 point)
- 3) On appelle succès l'évènement E : « $(X \geq 10)$ ».
a) Calculer la probabilité de E . (0,5 point)
b) On répète trois fois l'expérience de manière indépendante. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux succès. (0,5 point)

On donne : $\frac{23}{110} \simeq 0,2$; $\frac{87}{110} \simeq 0,7$

Problème (12 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = 2 - x + \ln(2x - 3) & \text{si } x \geq 2 \\ f(x) = -x + 1 + e^{x-2} & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) unité graphique 4 cm. On notera f' la dérivée de f .

Partie A (6,5 points)

1) Etudier la continuité de f en 2.

2) a) Vérifier que $\frac{f(x)}{x-2} = -1 + 2 \frac{\ln[2(x-2)+1]}{2(x-2)}$ pour tout $x > 2$. (0,5 point)

b) Etudier la dérivabilité de f en 2. Interpréter géométriquement le résultat obtenu. (0,5 point)

3) a) Calculer la limite de f en $-\infty$. (0,5 point)

b) Vérifier que pour tout $x \geq 2$. On a : $f(x) = 2 - x \left(1 - \frac{2x-3}{x} \cdot \frac{\ln(2x-3)}{2x-3} \right)$. (0,5 point)

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. (0,5 point)

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$. (0,5 point)

Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

4) Montrer que (C) admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $-\infty$. (0,5 point)

5) a) Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ puis étudier son signe. (1 point)

b) En déduire le sens de variation de f . (0,5 point)

c) Dresser le tableau de variation de f . (0,5 point)

6) Tracer (C) , (Δ) , la tangente et les demi-tangentes éventuelles. (1 point)

Partie B (3 points)

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dont l'une est dans l'intervalle $I = [3; 4]$. (On notera α celle qui est dans I). (0,5 point)

2) On considère la fonction g définie sur $[2; +\infty[$ par $g(x) = 2 + \ln(2x - 3)$

a) Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$. (0,5 point)

b) Montrer que : (i) $g(x) \in I$; pour tout $x \in I$. (0,5 point)

(ii) $|g'(x)| \leq \frac{2}{3}$ pour tout $x \in I$. (0,5 point)

c) En déduire que : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3} |x - \alpha|$ pour tout $x \in I$. (1 point)

Partie C (2,5 points)

Soit (U_n) la suite définie par :

$U_0 = 3$ et $U_{n+1} = g(U_n)$ pour tout entier naturel n .

1) Démontrer que pour tout entier naturel n , $U_n \in [3; 4]$. (0,5 point)

2) En déduire que pour tout entier naturel n ,

a) $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} |U_n - \alpha|$. (0,5 point)

b) $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$. (0,5 point)

3) Etudier la convergence de la suite (U_n) . (0,5 point)

4) Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait :

$|U_n - \alpha| \leq 10^{-3}$. (0,5 point)

Données numériques : $\ln 2 \simeq 0,7$; $\ln 3 \simeq 1,1$; $\ln 5 \simeq 1,6$; $\ln 10 \simeq 2,3$; $\ln \frac{2}{3} \simeq -0,4$;

$e^{-1} = 0,3$; $e^{-2} \simeq 0,1$

Fin