UNIVERSITE OUAGA I
Pr Joseph KI-ZERBO
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2019
Session de remplacement
Epreuve du 2ème tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 5

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Cette épreuve comporte deux (2) pages.

Exercice 1 (4 points)

1) Ecrire le complexe $d = (5-i)^2$ sous forme algébrique. (0,25 point)

2) Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 + 5z^2 + (5-8i)z - 35 - 20i$

a) Vérifier que $-4-3i$ est une racine de P. (0,25 point)

b) En déduire une factorisation de $P(z)$. (0,5 point)

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$. (0,5 point)

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, et C d'affixes respectives $z_A = -3+2i$, $z_B = 2+i$ et $z_C = -4-3i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère. (0,5 point)

b) Soit $Z = \dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.

Ecrire Z sous forme algébrique. (0,5 point)

c) Interpréter géométriquement le module et un argument de Z puis préciser la nature exacte du triangle ABC. (0,5 point)

4) Soit $\overrightarrow{W}$ le vecteur défini par : $\overrightarrow{W} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$

a) Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{W}$. (0,25 point)

b) Calculer l'affixe du point E image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{W}$. (0,25 point)

c) Placer le point E dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. (0,25 point)

d) Déterminer la nature exacte du quadrilatère $ABEC$. (0,25 point)

Exercice 2 (4 points)

Dans le plan muni du repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (unité graphique 1 cm), on considère la courbe (C) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x(t) = 4\cos 2t \\ y(t) = 2\sin 4t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

On désigne par $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t)\ ;\ y(t))$.

1) Comparer :

a) $M(-t)$ et $M(t)$. (0,25 point)

b) $M\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ et $M(t)$. (0,25 point)

2) Interpréter géométriquement chacun des résultats précédents. (0,5 point)

3) a) Montrer que π est la période commune aux fonctions x et y. (0,5 point)

b) Déduire de tout ce qui précède, que l'on peut restreindre le domaine d'étude des fonctions x et y à l'intervalle $I = \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$. (0,5 point)

4) a) Etudier les variations de x sur I. (0,5 point)

b) Vérifier que pour tout t élément de I, on a $y'(t) = 16\left(\cos 2t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos 2t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

En déduire les variations de y sur I. (0,5 point)

c) Dresser le tableau de variations conjoint de x et y. (0,5 point)

5) Tracer (C). (0,5 point)

On donne $\sqrt{2} = 1,4$.

Problème (12 points)

On considère la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} -x + 2 + 2\ln(x-1) \text{ si } x \in]1; 2[\\ x - 3 + e^{2-x} \text{ si } x \in [2; +\infty[\end{cases}$

On note (Γ) la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité graphique 2 cm) On notera f' la dérivée de f.

Partie A (8 points)

1) a) Etudier la continuité de f en 2. (0,5 point)

b) Etudier la dérivabilité de f en 2. Donner une interprétation géométrique du résultat obtenu. (1 point)

2) a) Calculer les limites de f en 1 et en $+\infty$. En déduire que (Γ) admet une asymptote verticale (Δ) dont on précisera une équation cartésienne. (1,5 point)

b) Calculer $f'(x)$ pour $x > 1$ et $x \neq 2$. Etudier son signe. (1 point)

c) En déduire le sens de variations de f, puis dresser son tableau de variation. (0,5 point)

3) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 3$ est une asymptote à la courbe (Γ). (0,5 point)

4) Tracer (Γ), (Δ), (D) et les demi tangentes éventuelles. (1,5 point)

5) Soit g la restriction de f à $]1; 2[$.

a) Montrer que g admet une application réciproque g^{-1} dont on précisera les ensembles de départ et d'arrivée. (1 point)

b) Construire la courbe (Γ') représentative de g^{-1} dans le même repère que (Γ).

Justifier la construction. (0,5 point)

Partie B (4 points)

Soit h la fonction définie sur $[2; +\infty[$ par $h(x) = -f(x)$

1) Sans étudier explicitement h, construire en pointillés la courbe représentative (C) de h dans le même repère puis justifier. (0,5 point + 0,5 point)

2) On considère un réel α supérieur à 3. Soit $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire du domaine délimité par les droites d'équations $x = 3$, $x = \alpha$, $y = x - 3$ et la courbe (Γ).

a) Calculer $\mathcal{A}(\alpha)$ en cm^2. (0,5 point + 0,5 point)

b) Déterminer $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \mathcal{A}(\alpha)$. (0,5 point + 0,5 point)

3) On désigne par (S) le domaine plan délimité par les courbes (Γ) et (C) et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$. On note $\mathcal{V}$ le volume du solide engendré par la rotation de (S) autour de l'axe des abscisses.

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_2^3 (x-3)e^{2-x}dx$. (0,5 point)

b) Calculer le volume $\mathcal{V}$ en cm^3. (0,5 point)

On donne : $\ln 2 \simeq 0,7$; $e^{-1} \simeq 0,3$

Fin