

## EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages  
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

**Exercice 1 (5 points)**

Soit le polynôme  $P(x) = (5x - 2)(2x - 1)(x + 1)$

- 1) Développer, réduire et ordonner  $P(x)$ . (1 point)
- 2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :
  - a) l'équation  $P(x) = 0$ . (1 point)
  - b) l'inéquation  $P(x) \geq 0$ . (1 point)
  - c) En utilisant les solutions dans  $\mathbb{R}$  de l'équation  $P(x) = 0$ , résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation:  $10(\ln x)^3 + (\ln x)^2 - 7 \ln x + 2 = 0$ . (1 point)
- 3) Résoudre dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , le système suivant :  $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2e^{2x} - 15e^{1-y} = 8 \end{cases}$  (1 point)

**Exercice 2 (5 points)**

Le 1er janvier 2020, une association caritative compte 1500 donateurs. Une étude a montré que chaque année, 30% des donateurs de l'année précédente ne renouvelaient pas leur don mais que chaque année, il y avait 300 nouveaux donateurs.

Pour tout entier naturel  $n$ , on appelle  $U_n$ , le nombre de donateurs de l'association le 1er janvier de l'année  $(2020 + n)$  ; on a donc  $U_0 = 1500$ .

- 1) a) Calculer  $U_1$  et  $U_2$ . (0,5 point + 0,5 point)  
b) Vérifier que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $U_{n+1} = 0,7U_n + 300$ . (0,5 point)
- 2) Soit la suite  $(V_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $V_n = U_n - 1000$ .
  - a) Montrer que la suite  $(V_n)$  est une suite géométrique et préciser sa raison et son premier terme. (0,5 point + 0,5 point + 0,5 point)
  - b) Exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ . (0,5 point + 0,5 point)
- 3) Calculer la limite de  $U_n$  en  $+\infty$ . (1 point)

**Problème (10 points)**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = -x + 3 + e^{x-2}$ .

On note  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 1 cm.

- 1) Calculer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . (0,5 point + 0,5 point)
- 2) a) Calculer  $f'(x)$  pour tout réel  $x$ ,  $f'$  étant la fonction dérivée de  $f$ . (1 point)  
b) Etudier le sens de variation de  $f$  et dresser son tableau de variation. (3 points)

- 3) a) Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = 3 - x$  est une asymptote oblique à la courbe  $(C)$  en  $-\infty$ . (1 point)  
b) Etudier la position relative de  $(C)$  par rapport à  $(D)$ . (1 point)
- 4) Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse  $x_0 = 2$ . (1 point)
- 5) Construire la tangente  $(T)$ , l'asymptote  $(D)$  et la courbe  $(C)$  sur  $]-\infty, 4]$ . (0,5 point + 0,5 point + 1 point)

Données :  $e^2 \simeq 7,4$  ;  $e \simeq 2,7$ .

*Fin*