GPM

Grand prof de Maths

Cours de Pre A

Édition : août 2018

Chapitre 1 : Equations Inéquations et Systèmes

Leçon 1 : Equations dans $\mathbb{R}$

Plan de la leçon

1.1.Equation du premier dégré

Activité d'apprentissage

Trouver la valeur de x dans chacune des expressions suivantes

$a-)\ x - 1 = 6$ $\quad$ $b-)\ 2x - 3 = 1$ $\quad$ $c-)\ 2 + x = -3x + 6$ $\quad$ $d-)\ x + 2 = 2x$

Résumé

On appel monôme tout écriture de la forme ax^n où a : est le coefficient, x: la variable et n la puissance ou l'exposant. Le degré d'un monôme est donné par la valeur de son exposant. Exemple : $2t^4$ est un monôme de degré 4, -3 est un monôme de degré 0.

Pour résoudre une équation dont le degré le plus élevé est 1, il suffit de cherche la valeur de l'inconnu (la variable, ou la lettre) tout en respectant le changement de signe dû au changement de membre.

Application

1-) résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes

$a-)\ 1 + x = 5$ $\quad$ $b-) -4x + 2 = -7$ $\quad$ $c-)\ 3(x - 1) + 2 = 8$ $\quad$ $d-)\ 2(3 - x) = x$

2-) Résoudre les équations précédentes dans $\mathbb{N}$

1.2. Equation se ramenant au premier degré

Activité d'apprentissage

Un père de x enfants, a promis 1 000 fr de se partager équitablement. Et la part de chacun serait de : $\frac{1\,000}{x}$. Cependant au moment du partage un enfant s'absente et le père constate avoir 800 Fr. Chacun reçoit $\frac{800}{x-1}$. Les parts sont restées les mêmes. Déterminer la valeur de x dans l'équation (E) : $\frac{1\,000}{x} = \frac{800}{x-1}$

Résumé

Pour résoudre une équation de premier degré il est possible de regrouper les termes ayant l'inconnu d'un côté (en utilisant la notion de changement de signe ou la notion de produit des extrêmes et produits des moyens ou la notion de factorisation) et les nombres d'un autre côté.

Application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes

$a-)\ \frac{x-1}{x+3} = \frac{2}{3}$ $\quad b-)\ (x-3)(x-1) = 0$ $\quad c-)\ x(x-3) = 2(x-3)$ $\quad d-)\ 2x - 1 = x + 3$

1.3. Forme canonique et application

Activité d'apprentissage

Donner la forme canonique de chacune des expressions littérales suivantes

a-) $P(x)=x^2-5x+6$ b-) $P(x)=x^2+2x+1$ c-) $P(x)=x^2-x+12$ d-) $P(x)=x^2+4x$

Résumé

On appel polynôme la somme algébrique de plusieurs monômes. Exemple : $P=3a^2+4a+1$; $Q=x+1$.

Le degré du polynôme est la puissance ou l'exposant le plus élevé. Exemple le degré du polynôme P est 2 et celui de Q est 1.

Soit P le polynôme de second degré défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels. Et x la variable. On appel forme canonique de P toute écriture de P sous la forme $P(x) = a[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}]$.En vue de simplifier l'écriture on pourra poser

$\Delta = b^2 - 4ac$. Ainsi on aura $P(x) = a[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$.

La forme canonique a 3 applications à savoir : *la détermination des racines, l'étude du signe et la factorisation* d'un polynôme de second degré.

La factorisation d'un polynôme de second degré dépend étroitement du signe de la constante $\Delta = b^2 - 4ac$.

-Si Δ est positif alors la factorisation est possible en utilisant l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

Exemple $P(x)=x^2-5x+6$ (le prof détail cet exemple)

-Si Δ est nulle alors la factorisation est possible en utilisant soit l'identité remarquable $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ ou $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

Exemple $P(x)=x^2+2x+1$(le prof pourra détailler)

Si Δ est négatif alors la factorisation est impossible.

Pour ce qui concerne la détermination des racines c'est après avoir factorisé que l'on pourra trouver facilement les racines.

<u>Note pour prof :</u> s'agissant de la 3e application nous en parlerons dans la leçon 2

<u>Application</u>

1-) donner la forme factorisée de P(x) dans chacun des cas suivants

a-) $P(x)=2x^2-10x+12$ b-) $P(x)=4x^2+4x+1$ c-) $P(x)=2x^2-x+2$ d-) $P(x)=x^2+6x$

2-) Déterminer les racines de P dans chacun des cas suivants (on pourra utiliser la forme factorisée)

a-) $P(x)=x^2-5x+6$ b-) $P(x)=x^2+2x+1$ c-) $P(x)=x^2-x+12$ d-) $P(x)=x^2+4x$

<u>1.4. Résolution des équations de la forme $ax^2+bx+c=0$</u>

<u>Activité d'apprentissage</u>

Résoudre dans ℝ chacune des équations suivantes

a-) $x^2-5x+6=0$ b-) $x^2+2x+1=0$ c-) $x^2-x+12=0$ d-) $x^2+4x=0$

<u>Résumé</u>

Il est possible de résoudre une équation de second degré sans toutefois faire appel à la forme canonique pour ce faire il faut :

- **Identifier les valeurs a b et c sur le polynôme de second degré**
- **Calculer le discriminent noté Δ qui est donnée par $\Delta = b^2 - 4ac$**
- **Constater le signe de Δ**

- **Si Δ est positif alors le polynôme admet deux racines distinctes x_1 et x_2 tel que $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$**
- **Si Δ alors le polynôme admet une racine double notée x_0 tel que $x_0=\frac{-b}{2a}$**
- **Si Δ est négatif alors le polynôme n'admet pas de solution**

<u>Application</u>

Résoudre dans ℝ chacune des équations suivantes

a-) $x^2-5x+6=0$ b-) $x^2+2x+1=0$ c-) $x^2-x+12=0$ d-) $x^2+4x=0$

1.5. Somme et produit des racines

Activité d'apprentissage

1-) Déterminer dans chacun des cas suivant les racines x_1 et x_2 du polynôme P

$a-)\ P = x^2 - 7x + 10$ $\quad b-)\ P = x^2 + 2x - 8$ $\quad c-)\ P = x^2 - 3x + 2$

$d-)\ P = x^2 + 5x + 4$ $\quad e-)\ P = 2x^2 - 8x + 6$ $\quad f-)\ P = -x^2 + 7x - 6$

On désigne par S la somme des racines tel que $S=x_1+x_2$ et P le produit tel que $P= x_1*x_2$

2-) Déterminer la valeur de S et de P dans les mêmes cas précédent

Résumé

Dans un polynôme de second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ où x_1 et x_2 sont les racines.

On appel somme des racines le réel S tel que $S=x_1+x_2$

On appel produit des racines le réel P tel que $P= x_1*x_2$

⇒Ainsi il est possible de trouver la valeur de S et de P sans toutefois connaitre la valeur de x_1 et x_2. En se servant du polynôme de la forme : $ax^2 + bx + c$. La somme S est donnée par $S=-\frac{b}{a}$ et le produit P est donné sous la forme $P=\frac{c}{a}$.

<u>Exemple</u> : soit le polynôme $A=3x^2-15x+18$

Déterminer la somme S et le produit P

<u>Solution guidée:</u> identifier les valeurs correspondantes à : a, b et c. Puis appliqué la formule $S=-\frac{b}{a}$ et $P= \frac{c}{a}$. Et enfin vérifier en passant par les racines pour consolider la notion.

⇒ En revanche connaissant la valeur de S et de P il est possible de déterminer les racines en résolvant l'équation $x^2-Sx+P=0$ où S est la somme et P le produit.

<u>Exemple :</u> soit P un polynôme de second degré tel que S=5 et P=3 déterminer les racines de P.

<u>Solution :</u> que le prof pourra déployer méthodiquement.

Applications

1-) Sans toutefois calculer les racines calculer les racines de A donnez la valeur de S et de P

$a-)\ A = 3x^2 - 12x + 9$ $\quad b-)\ A = -x^2 + 2x + 5$ $\quad c-)\ 2x^2 + x - 6$

2-) On donne dans chacun des cas S et P, déterminer les racines du polynôme de second degré

a-) S=5 et P=3 b-) S=4 et P=3 c-) S=-3 et P=2 d-) S=-3 et P=-10

1.6. Problème concret

Problème 1

Un père de x enfants décide de partager équitablement la somme de 1000 fr. Cependant à l'instant du partage un enfant s'est absenté et la part de chacun a augmenter de 50 fr.

Déterminer le nombre total d'enfant de ce papa

Problème 2

Monsieur Ramzi dispose d'un champ rectangulaire dont les dimensions l'échappent. Cependant il se souvient que le périmètre est de 10 m et la superficie est de 6 m²

Leçon 2 Inéquation

Plan de la leçon

2.1. Signe d'un polynôme de premier degré

soit $p(x) = ax + b$ $(a \neq 0) et\ b\ \in IR$
soit x_0 sa racine
Son tableau de signe se présente comme ci-dessous

x	$-\infty$ $\qquad$ x_0 $\qquad$ $+\infty$
$p(x) = ax + b$	signe contraire de a $\quad$ 0 $\quad$ signe de a

Application : Etudier le signe dans IR de $g(x) = 2x + 4$

$2x + 4 = 0$ entraine que $2x = -4$

$$x = -2$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$2x + 4$	-	0	+

$g(x) = 2x + 4$ avec a = 2

dans $]-\infty; -2]$ $g(x) \leq 0$

dans $[-2; +\infty[$ $g(x) \geq 0$

2.2. Signe d'un polynôme de second degré

Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ un polynôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$.

Le signe de $p(x)$ dépend de celui de Δ, nous avons trois cas

1^er^ cas : si $\Delta < 0$ (le polynôme n'a aucune racine) alors le signe de $p(x)$ est celui de a

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a

2ème cas : si $\Delta = 0$ (le polynôme a une racine double x_0) alors le signe de $\mathrm{p}(x)$ est celui de a.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de a

3ème cas : si $\Delta > 0$

(le polynôme a deux racines distinctes x_1 *et* x_2 *avec* $x_1 < x_2$) alors le signe de $\mathrm{p}(x)$ est le suivant :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de (-a)	0	signe de a

2.3. Résolution des inéquations de second degré

Résoudre une inéquation du second degré revient à étudier le signe de $ax^2 + bx + c$.

Exemple : Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

a) $-x^2 + x - 4 \leq 0$
b) $-x^2 + x - 4 > 0$
c) $x^2 - 2x + 1 > 0$
d) $x^2 - 2x + 1 < 0$
e) $x^2 - x - 6 > 0$
f) $-3x^2 + 5x + 1 \leq 0$
g) $x^2 - 3x \geq 0$

Leçon 3 systèmes linéaires de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Plan de la leçon

3.1. Rappels des différentes méthodes de résolution des systèmes linéaires

3.2. Changement d'inconnues

3.3. Problème concrets

3.1. Rappels des différentes méthodes de résolution des systèmes linéaires

a) définition

soient a, b, c, a', $b' et\ c'$ six réels donnés. Résoudre pour x, y le système : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ consiste à déterminer l'ensemble S des couples $(x; y)$ de réels qui vérifient simultanément les deux équations.

b) exemple

résoudre pour $x\ et\ y$ réels le système (S) : $\begin{cases} 2x - 5y = 11 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$

- **1ère méthode : par combinaison linéaire**

(S) : $\begin{cases} 2x - 5y = 11 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases} \begin{vmatrix} \times (-3) \\ \times \ \ (2) \end{vmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 15y = -33 \\ 6x + 8y \ \ = \ 10 \end{cases}$

$23y = -23 \Leftrightarrow y = -1$

(S) : $\begin{cases} 2x - 5y = 11 & \times (4) \\ 3x + 4y = 5 & \times \ (5) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 20y = 44 \\ 15x + 20y \ \ = \ 25 \end{cases}$

$23x = 69 \Leftrightarrow x = 3$

Le système (S) admet le couple (3 ; -1) comme solution ; S= $\{(3\ ;\ -1)\}$

Résumé

Cette méthode consiste à multiplier les équations par des coefficients judicieusement de façon à faire disparaître l'une des inconnues par sommation membre à membre. Les valeurs de $x\ et\ y$ sont déterminées successivement.

- **2ème méthode : par substitution**

(S) : $\begin{cases} 2x - 5y = 11 & (1) \\ 3x + 4y = 5 & (2) \end{cases}$

Dans l'équation (1) exprimons $x$en fonction de y : $2x - 5y = 11 \Leftrightarrow x = \frac{5y+11}{2}$

Dans l'équation (2) remplaçons x par sa valeur :

$3\left(\frac{5y+11}{2}\right) + 4y = 5 \Leftrightarrow \frac{15y}{2} + 4y = 5 - \frac{33}{2} \Leftrightarrow 15y + 8y = -23 \Leftrightarrow y = -1$

On remplace y par – 1 dans l'expression de $x = \frac{5y+11}{2}$ et on obtient $x = 3$

D'où l'ensemble solution du système est : S= $\{(3\,;\,-1)\}$.

Résumé

Cette méthode consiste à exprimer l'une des inconnues x *ou* y en fonction de l'autre à l'aide d'une des équations puis de reporter le résultat dans l'équation restante.

- **3ème méthode : par déterminant**

Soit le système de deux équations du premier degré à deux inconnues x *et* y : (S) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où a, b, c, a', b' *et* c' six réels donnés. Pour résoudre ce système, on calcule :

- ✓ le déterminant principal : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b;$
- ✓ Le déterminant par rapport à x : $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b;$
- ✓ Le déterminant par rapport à y : $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$;

<u>Cas particuliers</u>

- Si $\Delta \neq 0$ alors le système admet un unique couple solution $(x;y)$ tel que : $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ et $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ et S= $\{(x;y)\}$.
- Si $\Delta = 0$ et $\Delta_x \neq 0$ ou $\Delta_y \neq 0$ alors le système n'admet pas de solution, S= $\emptyset$.
- Si $\Delta = 0$ et $\Delta_x = 0$ et $\Delta_y = 0$ alors le système admet une infinité de solutions représentée par la droite (D) d'équation : a$x + by = c$.

Exemple : soit à résoudre par la méthode du déterminant le système :

$$(S) : \begin{cases} 2x - 5y = 11 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - (-15) = 23 \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 11 & -5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 44—25 = 69$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - (33) = -23;\ x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{69}{23} = 3 \text{ et } \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-23}{23} = -1$$

D'où l'ensemble solution du système est : S= $\{(3\,;\,-1)\}$.

<u>3.2. Changement d'inconnues</u>

1) Résoudre dans IR² le système (S) : $\begin{cases} 5x - 2y = -16 \\ 7x - 3y = -23 \end{cases}$
2) En déduire la résolution de chacun des systèmes :

a) (S₁) : $\begin{cases} \frac{5}{x} - \frac{2}{y} = -16 \\ \frac{7}{x} - \frac{3}{y} = -23 \end{cases}$ et b) (S₂) : $\begin{cases} \frac{5}{x-1} - \frac{2}{y+3} = -16 \\ \frac{7}{x-1} - \frac{3}{y+3} = -23 \end{cases}$

Résolution

1) Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système (S) : $\begin{cases} 5x - 2y = -16 \\ 7x - 3y = -23 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -15 - (-14) = -1$; $\Delta_x = \begin{vmatrix} -16 & -2 \\ -23 & -3 \end{vmatrix} = 2$; $\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & -16 \\ 7 & -23 \end{vmatrix} = -3$

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2}{-1} = -2$ et $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-3}{-1} = 3$

D'où l'ensemble solution du système est : S= $\{(3\,;\,-1)\}$.

2) Déduisons :

a) Posons X=$\frac{1}{x}$ et Y= $\frac{1}{y}$ avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$ le système (S_1) devient :

$\begin{cases} 5X - 2Y = -16 \\ 7X - 3Y = -23 \end{cases}$ D'après la question précédente X= -2 et Y= 3 ce qui entraîne que $\frac{1}{x} = -2$ soit $x = -\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{y} = 3$ soit $y = \frac{1}{3}$

S= $\left\{ (-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{3}) \right\}$.

b) Posons X=$\frac{1}{x-1}$ et Y= $\frac{1}{y+3}$ avec $x \neq 1$ et $y \neq -3$ le système (S_2) devient :

$\begin{cases} 5X - 2Y = -16 \\ 7X - 3Y = -23 \end{cases}$ D'après la question précédente X= -2 et Y= 3 ce qui entraîne que $\frac{1}{x-1} = -2$ soit $-2x + 2 = 1$ $d'où$ $x = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{y+3} = 3$ soit $3y + 9 = 1$ $d'où$ $y = -\frac{8}{3}$

S= $\left\{ (\frac{1}{2}\,;\frac{-8}{3}) \right\}$.

3.3. Problème concrets

Exemple 1

Résoudre le système d'équations suivant : $\begin{cases} 2x + 3y = 9800 \\ x + 4y \quad = 8900 \end{cases}$

Pour assister à un spectacle, la famille Kengne composée de deux adultes et trois enfants a payé 9800 frs. Mme Chenou accompagnée de ses quatre enfants a payé 8900 frs.

a) Traduire cette situation par un système d'équations.

b) Quel est le prix d'un billet d'entrée pour adultes et un billet d'entrée pour enfant ?

Exemple 2

1) Résoudre dans IR l'équation $x^2 - 25x + 150 = 0$

2) Un champ rectangulaire a une surface de 150m^2 et de périmètre 50m.Calculez les dimensions de ce champ rectangulaire

Exemple 3

Un champ rectangulaire a pour aire 60m^2.Si on diminue sa longueur de 3m et en même temps on augmente sa largeur de 3m alors son aire augmente de 12 m^2.

Déterminez les dimensions de ce champ rectangulaire.

Résumé

Pour résoudre un problème, on peut adopter la démarche suivante :

- Choix des inconnues et leurs contraintes ;
- Traduction mathématique des données ;
- Résolution mathématique du problème ;
- Choix des solutions du problème en fonction des contraintes imposées.

Travaux dirigés : Equations de degré 3 et 4

1) Soit $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$
   a) Vérifier que 1 est racine de $p(x)$
   b) Déterminer les réels a, b et c tel que $p(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$
   c) Résoudre dans IR $p(x) = 0$

2) Soit $p(x) = x^4 - 10x^2 + 9$
   a) En posant X= x^2 factoriser $p(x)$
   b) Résoudre $p(x) = 0$ puis $p(x) \leq 0$

LECON1 : REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

1-DEFINITIONS

Soit f une fonction numérique définie sur un domaine noté D_f.

On appelle représentation graphique de f, l'ensemble des positions des points $M(x, f(x))$ construits dans le domaine de définition de f .

On note C ou (C) ou C_f , la courbe représentative de f.

On dit que le point M(x,y) est sur la courbe de f si $y = f(x)$

Ex : On donne $f(x) = x - 1$

Les points A(0, -1) et B(2, 1) sont sur C_f .

2-REPRESENTATIONS GRAPHIQUES DE QUELQUES FONCTIONS ELEMENTAIRES

b)-La fonction t : X ⟶ x

$D_f = R$. Table de quelques valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$t(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3

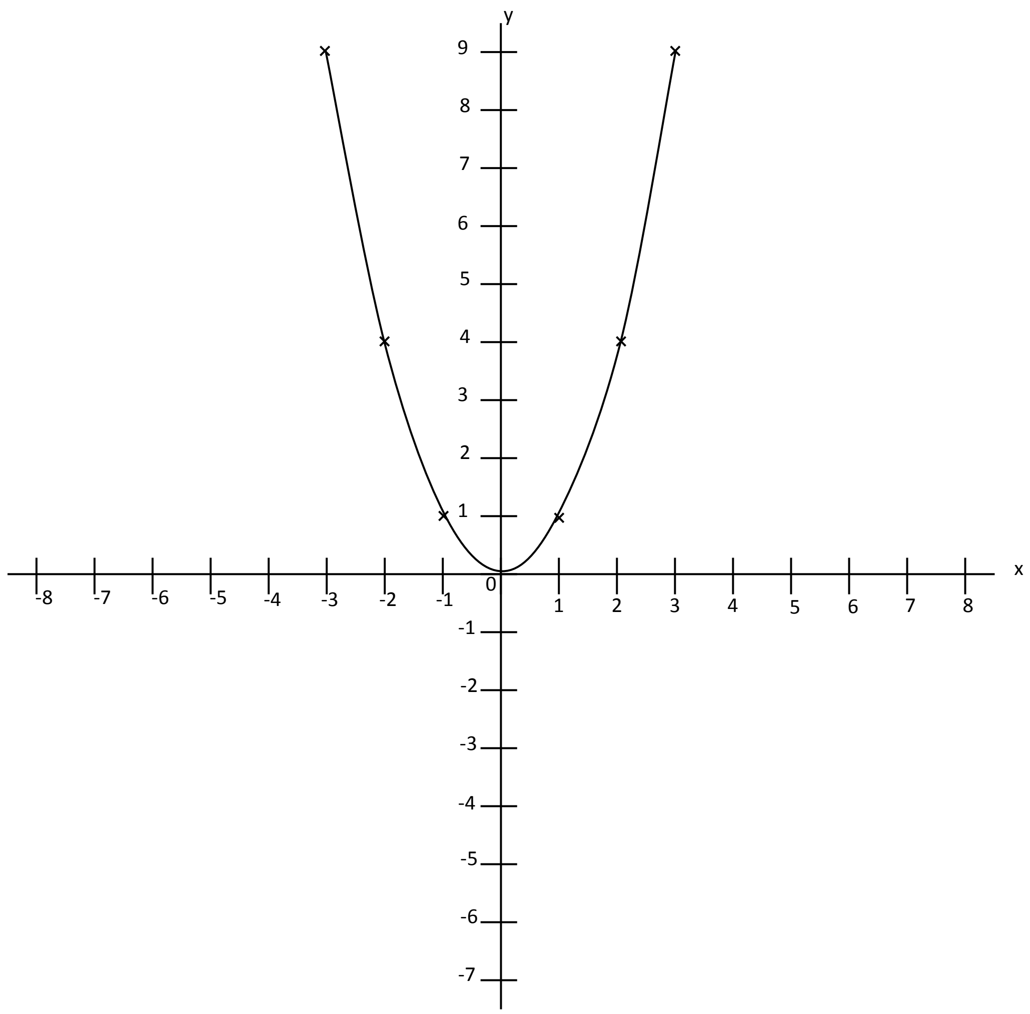
Courbe représentative C_t

b)-La fonction f : X $\longrightarrow$ X^2 (fonction carrée)

$D_f = R.$

Table de quelques valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\boldsymbol{f(x)}$	9	4	1	0	1	4	9



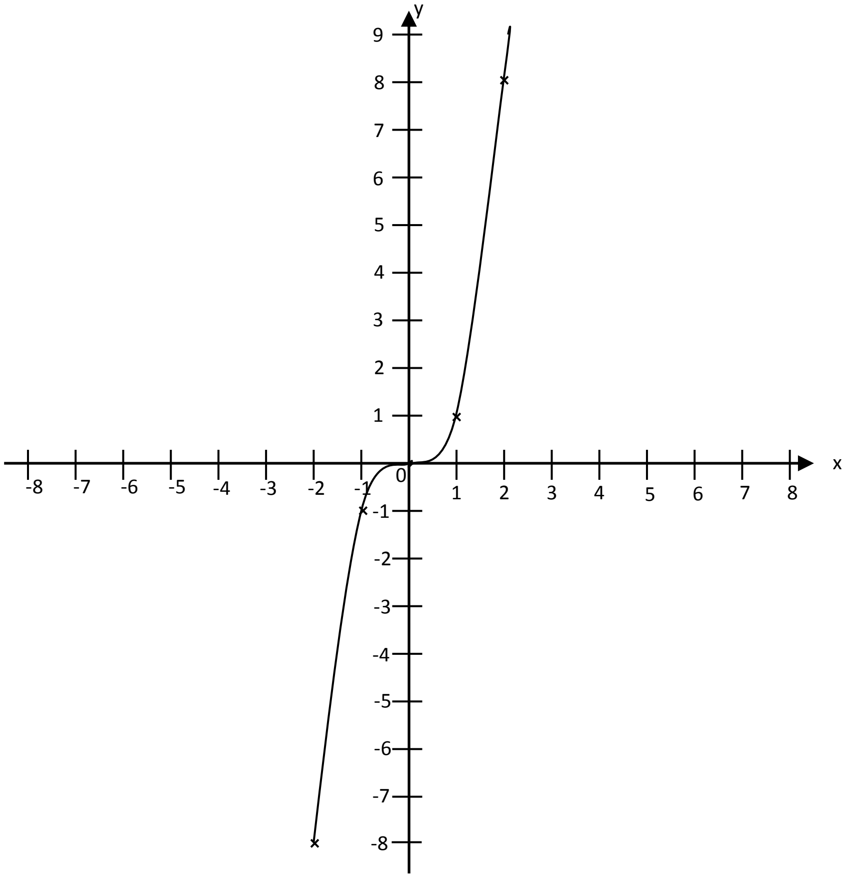
Courbe représentative C_f

c)-La fonction g : X $\longrightarrow X^3$ (fonction cubique)

$D_f = R$.

<u>Table de quelques valeurs :</u>

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	-27	-8	-1	0	1	8	27

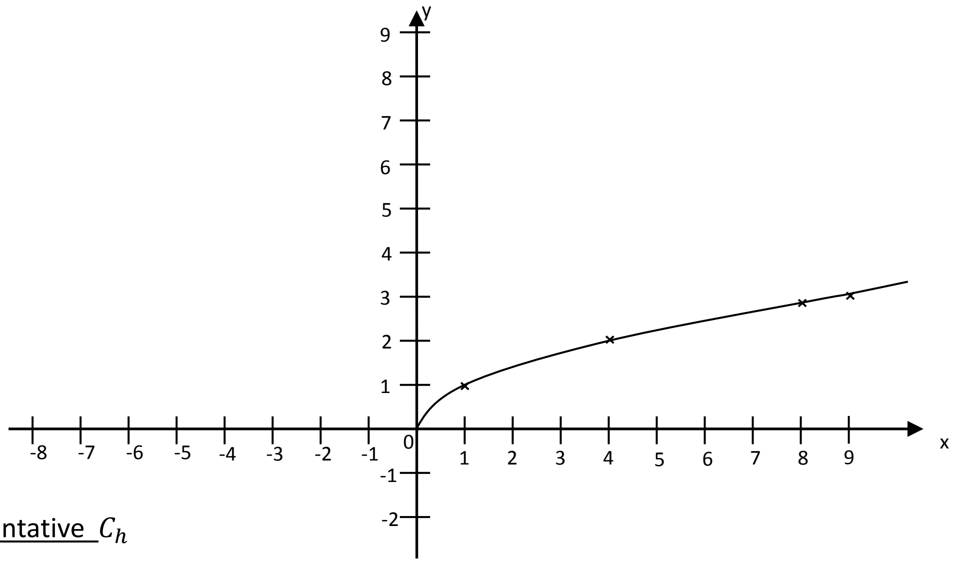


d)-La fonction h : X $\longrightarrow \sqrt{x}$ (fonction racine carrée)

$D_f = [0\ ;\ +\infty[$

<u>Table de quelques valeurs :</u>

x	0	1	4	9
$h(x)$	0	1	2	3



<u>Courbe représentative</u> C_h

3) Images et antécédents

Une fonction *f* est une relation entre 2 ensembles : un ensemble A de départ et un ensemble B d'arrivée, qui, à tout élément *x* de A fait correspondre, *au plus un* élément *y* de B.

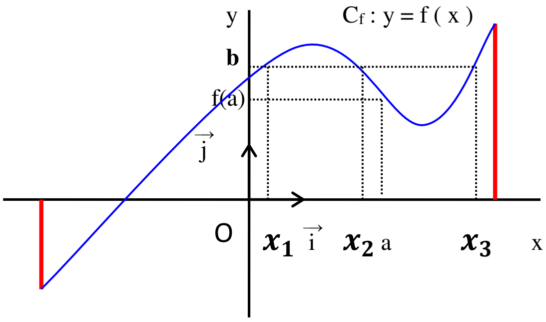
On note : $y = f(x)$

y est l'image de x par *f*,

x est un antécédent de y par *f*.

Certains éléments *x* de A peuvent ne pas avoir d'image par *f*. On dit que ces éléments ne font pas partie de l'ensemble de définition de *f*, noté D*f*. En tout état de cause, si *x* a une image, celle-ci est unique.

En revanche, il est tout à fait possible pour un élément *y* de B d'avoir plusieurs antécédents dans A.



- f (a) est l'unique **image** de a .
- x_1 , x2 et x3 sont **les antécédents** de b. (Un réel peut admettre aucun antécédent, ou un, ou plusieurs antécédents.)

a) Détermination algébrique

Exemple

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$

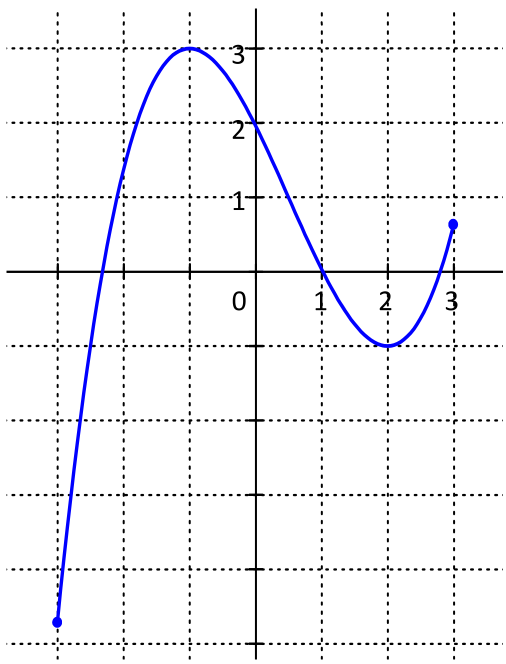
1) Déterminer l'image de chacun des nombres suivants : -1 ; 1 ; -2.
2) Déterminer les antécédents par f de 0.

b) Détermination graphique

Le graphique ci-contre représente une fonction f définie sur [-3 ; 3]
En utilisant ce graphique :

1°) Déterminer l'image de -1 ; 0 ; 1 et 2.

2°) Déterminer les antécedents des réels suivants : -1 ; 1 et 3



LECON3 : PARITES ET ELEMENTS DE SYMETRIES

1-Fonctions paires et fonctions impaires

a)-On dit que la fonction f est paire si

- pour tout x dans D_f, -x est aussi dans D_f
- f(-x)=f(x)

b)-On dit que la fonction f est impaire si

- pour tout x dans D_f, -x est aussi dans D_f
- f(-x)=f(x)

Etudier la parité d'une fonction c'est dire si elle est paire ou impaire

Exemple la fonction f(x)= $\boldsymbol{x^2}$ **est paire**

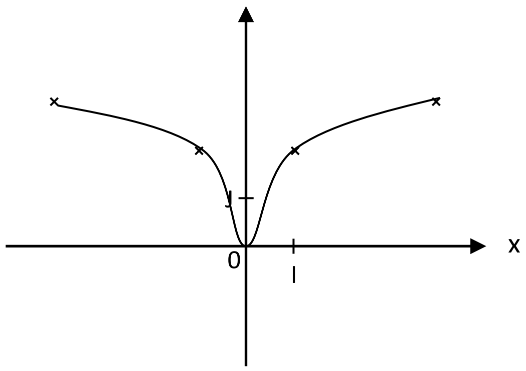
La fonction g(x)= $\boldsymbol{x^3}$ **est impaire.**

Exercice

Etudier la parité des fonctions $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$

Conséquences graphiques

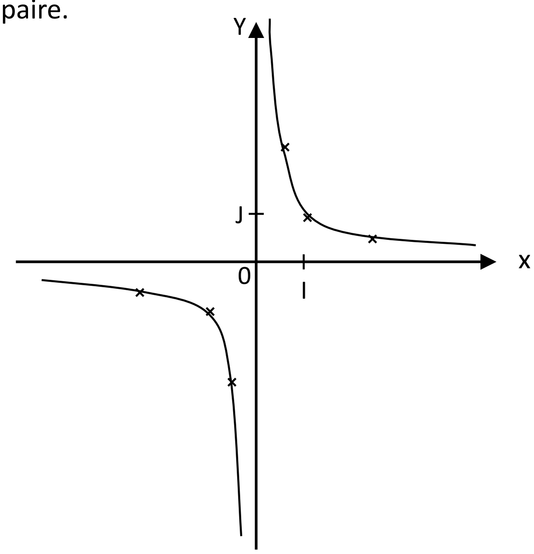
1- Lorsque une fonction est paire alors sa courbe représentative est symétrique par rapport à la l'axe des ordonnées (OY).



2- Lorsque la courbe représentative d'une fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées alors cette fonction est paire.

3- Lorsqu'une fonction est impaire alors sa courbe représentative est symétrique par rapport au point O, origine du repère.

4- Lorsque la courbe représentative d'une fonction est symétrique par rapport au point O, alors cette fonction est impaire.



2) **Eléments de symétrie d'une courbe de fonction**

a) **Centre de symétrie**

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x ; $D_{f,}$son ensemble de

définition et Ω(oméga) un point de coordonnées (a ;b). Ω(a ;b) est centre de symétrie à la courbe de f si et seulement si pour tout réel $x\ tel\ que\ a+x\ \ \in D_{f,} on\ a: a-x \in D_{f,}\ et\ f(a-x)+f(a+x)=2b$ ou encore $f(2a-x)+f(x)=2b$

Exemple1 on donne $f(x)=\frac{x+3}{x+2}$, montrer que le point Ω (-2 ;1) est centre de symétrie à la courbe de f.

Exemple2 on donne $f(x)=\frac{2x}{x-1}$, montrer que le point A(1 ;2) est centre de symétrie à la courbe de f.

b) **Axe de symétrie à une courbe de fonction**

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x , (Δ) une droite d'équation $x=a$.La droite (Δ) d'équation $x=a$ est axe de symétrie à la courbe de f si et seulement si pour tout réel $x\ tel\ que\ a+x\ \ \in D_{f,} on\ a: a-x \in D_{f,}\ et\ f(a-x)=f(a+x)$ ou encore $f(2a-x)=f(x)$.

Exemple1 on donne $g(x)=x^2-2x+5$.Montrer que la droite (Δ) : $x=2$ est axe de symétrie à la courbe de g.

Exemple2 Montrer que la droite (Δ) : $x=1$ est axe de symétrie à la courbe de de la fonction $h(x)=-x^2+2x+4$.

Remarques

- ✓ Toute fonction polynôme du second degré admet un axe de symétrie.
- ✓ Toute fonction homographique admet un centre de symétrie.

Complément : position relative de deux courbes

Méthode :

Soient f et g deux fonctions, (C_f) et (C_g) leurs courbes représentatives.Pour étudier la position relative de leurs courbes sur un intervalle I, nous pouvons étudier le signe de $f(x)-g(x)$ sur l'intervalle I.

- Si $f(x)-g(x)>0$ alors (C_f) est au-dessus de (C_g).
- Si $f(x)-g(x)<0$ alors (C_f) est en dessous de (C_g).

  Les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sur I sont les abscisses des points d'intersection de leurs courbes.

Application :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 et (D) : $y=3x+1$

On précise : f($\frac{1}{2}$)=-$\frac{9}{4}$; f(0)=-2 ; f(-1)=f(2)=0 ; f(-2)=4 ; f(-3)=10 et f(3)=4.

1) Représenter (C_f) et la droite (D) dans un repère orthonormé.
2) Résoudre graphiquement dans IR : $f(x)=y$; $f(x)>y$; $f(x)<y$

En déduire la position la position relative de (C_f) et (D)

3) Dresser le tableau de signe de f sur IR
4) Dresser le tableau de variation de f sur [-3 ;3]
5) Déterminer les réels a, b et c tel que $f(x)=ax^2+bx+c$
6) Vérifier les résultats de la question 2 par calcul.

CHAPITRE 3 : LIMITES, CONTINUITE ET FONCTIONS DERIVEES

LECON 1 : LIMITES

Objectif

Calculer les limites d'une fonction aux bornes de son domaine de définition.

I.) Approche intuitive de la notion de limite

Activité :

Soit f(x) = $x^2 - 2$

1) A l'aide d'une calculatrice, compléter les tableaux suivants :

Tableau 1

x	0,9	0,95	0,999	0,999
f(x)				

Tableau 2

x	10	500	10000	999000
f(x)				

2) Que pouvez-vous dire des valeurs de x ?

3) Que pouvez-vous dire des valeurs prises par $f(x)$?

Dans le premier tableau, nous constatons que lorsque x se rapproche de 1, $f(x)$ se rapproche de plus en plus de – 1 : nous dirons que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 1 égale à – 1 et cela se note $\lim_{X \to 1} f(x) = -1$

Dans le deuxième tableau, nous constatons que lorsque x devient de plus en plus grand , $f(x)$ devient aussi de plus en plus grand : nous dirons que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini est égale à + ∞ et cela se note $\lim_{X \to \infty} f(x) = +\infty$

Dans le deuxième tableau, nous constatons que lorsque x se rapproche de 1, $f(x)$ se rapproche de plus en plus de – 1 : nous dirons que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 1 égale à – 1 et cela se note $\lim_{X \to 1} f(x) = -1$

1) Résumé

Soit f une fonction numérique. Soit (C_f) sa courbe représentative. Soit M(a ; b) un point du plan et K appartenant à IR. M appartient à (Cf) si et seulement si $\lim_{X \to k} f(x) = f(k)$

Si f n'est pas définie en K mais plutôt sur des intervalles $]-\infty; K[$ ou $]K; +\infty[$ dans ce cas on calcule :

— La limite à gauche de K pour le premier intervalle. Elle se note $\lim\limits_{\substack{x \to K \\ <}} f(x)$

— La limite à droite de K pour le second intervalle. Elle se note $\lim\limits_{\substack{x \to K \\ >}} f(x)$

2) Application

Soit $f(x) = x^2 - 5x + 1$ et $g(x) = \frac{x-2}{x+3}$

Justifier l'existence et le calcul des limites de f et g en 2 et – 4

$D_f =]-\infty; +\infty[$

g existe si et seulement si $x + 3 \neq 0 \leftrightarrow x \neq -3$

$D_g =]-\infty; -3[\cup]-3; +\infty[$

f et g sont définies en 2 et -4

$\lim\limits_{X \to 2} f(x) = f(2) = (2)^2 - 5(2) + 1 = 4 - 10 + 1 = -5$

$\lim\limits_{X \to -4} f(x) = f(-4) = (-4)^2 - 5(-4) + 1 = 16 + 20 + 1 = 37$

$\lim\limits_{X \to 2} g(x) = g(2) = \frac{2-2}{2+3} = \frac{0}{5} = 0$

$\lim\limits_{X \to -4} g(x) = g(-4) = \frac{-4-2}{-4+3} = \frac{-6}{-1} = 6$

II.) Limites en l'infini des fonctions polynômes et rationnelles

1) Les fonctions polynômes

La limite en l'infini des fonctions polynômes est égale à la limite en l'infini de son monôme de plus haut degré.

a) Propriétés

Soit n ∈ IN ($n \geq 1$), K∈ IR

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \\ +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$
- K $(+\infty) = \begin{cases} +\infty \text{ si } K > 0 \\ -\infty \text{ si } k < 0 \end{cases}$
- K $(-\infty) = \begin{cases} -\infty \text{ si } K > 0 \\ +\infty \text{ si } k < 0 \end{cases}$

b) Application

Soit $g(x) = -x^2 + 2$ et $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

Calculer les limites de f et g respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$

$$\lim_{X \to +\infty} g(x) = \lim_{X \to +\infty} -x^2 + 2 = \lim_{X \to +\infty} -x^2 = -\infty$$

$$\lim_{X \to -\infty} f(x) = \lim_{X \to -\infty} x^3 - 2x^2 + 1 = \lim_{X \to -\infty} x^3 = -\infty$$

2) Fonctions rationnelles

La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite en l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur. La formule suivante est parfois utilisé :

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{K}{x^n} = 0$ (avec $K \neq 0$ et $n \in IN, n \geq 1$)

Application

On considère les fonctions :

$f(x) = \frac{2x-1}{3x+4}$; $g(x) = \frac{4}{2x-5}$; $h(x) = \frac{3x^2+1}{x-2}$; $k(x) = \frac{-x^2+3x+1}{x+4}$

Calculer les limites en $+\infty$ de ces fonctions

Solution

$$\lim_{X \to +\infty} f(x) = \lim_{X \to +\infty} \frac{2x-1}{3x+4} = \lim_{X \to +\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{X \to +\infty} g(x) = \lim_{X \to +\infty} \frac{4}{2x-5} = \lim_{X \to +\infty} \frac{4}{2x} = 0$$

$$\lim_{X \to +\infty} h(x) = \lim_{X \to +\infty} \frac{3x^2+1}{x-2} = \lim_{X \to +\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{X \to +\infty} 3x = +\infty$$

$$\lim_{X \to +\infty} k(x) = \lim_{X \to +\infty} \frac{-x^2+3x+1}{x+4} = \lim_{X \to +\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{X \to +\infty} -x = -\infty$$

III.) Limites à gauche et à droite

Soit $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0)$ une fonction homographique qui est définie sur un intervalle $]-\infty; x_0[\ \cup\ ]x_0; +\infty[$, x_0 est le nombre réel qui annule le dénominateur de la fonction

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{ax_0+b}{cx_0+d}$

Posons K= $ax_0 + b$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \frac{K}{cx_0+d}$

Dans ce cas précis, on calcule la limite à gauche et à droite en x_0. Pour cela, il faut dresser le tableau de signe du dénominateur et appliquer ce qui suit :

— Lorsque le dénominateur est positif, sa limite en x_0 est 0^+

— Lorsque le dénominateur est négatif, sa limite en x_0 est 0^-

Limite du numérateur	K>0	K>0	K<0	K<0
Limite du dénominateur	$0_>$	$0_<$	$0_>$	$0_<$
Limite de la fonction	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Exercice d'application

Soit $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$ et $g(x) = \frac{x+4}{2-x}$

Calculer les limites à gauche et à droite en 1 et 2 respectivement pour f et g.

Solution

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1} 2x - 3 = 2(1) - 3 = -1 \\ \lim\limits_{x \to 1} x - 1 = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x - 1$	-	0	+

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2} x + 4 = (2) + 4 = 6 \\ \lim\limits_{x \to 2} 2 - x = 2 - 2 = 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2 - x$	+	0	-

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} g(x) = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} g(x) = -\infty$

LECON 2 : CONTINUITE

Objectif : Etudier la continuité d'une fonction en un point

1) Définition

Soit f une fonction et x_0 un nombre réel.

On dit que f est continue en x_0 si :

— f est définie en x_0
— $\lim_{x \to x_0} f(x)$= f(x_0)

2) Propriété

P1) Soit x_0 ∈ IR , f est continue en x_0 si et seulement si :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$$

P2) Les fonctions élémentaires suivantes sont continues sur leurs domaines :

$f(x) = x;$ $f(x) = x^n$ $(n \in IN^*)$; $f(x) = k, k \in IR$; $f(x) = \frac{1}{x^n}$ $(x \neq 0, n \in IN^*)$

P3) Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle K

- Les fonctions f+g, f×g, $kf(k \in IR)$, et $|f|$ sont continues sur K
- Si g ne s'annule pas sur K, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur K

P4) Toute fonction polynôme est continue sur IR et toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.

Exemple

1) Montrer que $f(x) = 2x + 1$ est continue en $x_0 = 1$
2) Etudier la continuité de $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$ en $x_0 = -2$

LECON 3 : FONCTIONS DERIVEES

Objectifs :

- Etudier la dérivabilité d'une fonction en un point de son domaine ou sur un intervalle.
- Ecrire l'équation de la tangente à une courbe en un point.
- Utiliser la dérivée d'une fonction pour étudier le sens de variation d'une fonction.

1) Nombre dérivé d'une fonction en x_0

a) Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un élément de I.On dit que f est dérivable en x_0 si :

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie en x_0. Cette limite est appelé nombre dérivé de f en x_0 et notée $f'(x_0)$.on a donc $f'(x_0)= \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Exemple : Soit $f(x) = x^2 - 1$

Etudier la dérivabilité de f en $x_0= 2$

Solution

$f(x) = x^2 - 1 \qquad x_0= 2$

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-1-3}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{4-4}{2-2}$ F.I

On a $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-2^2}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$

f est dérivable en $x_0= 2$ et $f'(2) = 4$

b) Interprétation graphique

Soit f une fonction, (C_f) sa courbe représentative et A un point de (C_f) d'abscisse x_0.

Si f est dérivable en x_0 alors (C_f) admet une tangente (T) en A dont le coefficient directeur est $f'(x_0)$. Une équation de la tangente (T) est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Cas particulier

Lorsque $f'(x_0)= 0$, la tangente à (C_f) au point d'abscisse x_0 est parallèle à l'axe des abscisses.

Exemple

Reprenons l'exemple précédent.

f$(x) = x^2 - 1$ Écrivons l'équation de la tangente en x_0= 2

d'après l'exemple précédent, f' (2)= 4 et f(2)= 3

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

$$y = 4(x - 2) + 3$$

$$y = 4x - 5$$

c) Dérivabilité et continuité en x_0

Propriété : Si une fonction est dérivable en x_0 alors elle est continue enx_0.

2) Fonction dérivée

a) Définition

Soit f une fonction, on dit que f est dérivable sur un intervalle ouvert I lorsque la fonction f est dérivable en tout point de I.

La fonction $f' : x \rightarrow f'(x)$ est alors appelée dérivée (ou fonction dérivée) de f.

b) Dérivée des fonctions élémentaires

f	f'	Ensemble de dérivabilité
a (constante)	0	R
x	1	R
$a.x+b$	a	R
x^2	$2x$	R
x^3	$3x^2$	R
$x^n \; n \in Z^*$	$n.x^{n-1}$	R ou R* suivant le signe de n
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	R*+
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	R*

Exemple

- f$(x) = x^2$ $f'(x) = 2x$
- f$(x) = x^6$ $f'(x) = 6x^5$
- f$(x) = 8$ $f'(x) = 0$

c) Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété : soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I et n un entier naturel supérieur ou égale à 2.

— La fonction u+v est dérivable sur I
— La fonction u×v est dérivable sur I
— La fonction u^n est dérivable sur I

$f(x)$	$f'(x)$
$u+v$	$u'+v'$
$u.v$	$u'v+u.v'$
$k.u$	$k.u'$
$\frac{1}{u}$ avec u(x)≠0 sur K	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ avec v(x)≠0 sur K	$\frac{u'.v-u.v'}{v^2}$
$u^n \quad n\in Z^*$	$n.u^{n-1}\times u'$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Exemple

- $f(x) = 3x^4 \quad f'(x) = 12x^3$
- $f(x) = 2x^3 + 3x + 1 \quad f'(x) = 6x^2 + 3$
- $f(x) = \sqrt{2x+1} \qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$
- $f(x) = (2x^3 + 3x)^4 \quad f'(x) = 4(6x^2 + 3)(2x^3 + 3x)^3$

3) FONCTION DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATIONS

THÉORÈME

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I.

- f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout x ∈ I
- f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout x ∈ I
- f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$

<u>Exemple</u>

Etudions les variations de la fonction f définie par $\mathrm{f}(x) = x^2 - 2x + 2$, puis dressons son tableau de variation

<u>Solution</u>

$D_f =]-\infty; +\infty[$

$$\lim_{X \to -\infty} f(x) = \lim_{X \to -\infty} x^2 - 2x + 2 = \lim_{X \to -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{X \to +\infty} f(x) = \lim_{X \to +\infty} x^2 - 2x + 2 = \lim_{X \to +\infty} x^2 = +\infty$$

f est continue et dérivable comme fonction polynôme et on a :

$$f'(x) = 2x - 2$$

$$f'(x) = 0 \; ssi \; 2x - 2 = 0$$

$$x = 1$$

f(1)= 1-2+2= 1

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

CHAPITRE : DENOMBREMENTS

Leçon 1 : PREMIER OUTIL DE COMPTAGE

Objectifs pédagogiques : Utiliser certains outils pour dénombrer.

I-1 : COMPTAGE SIMPLE

Définition 1 : Dénombrer un ensemble c'est comptés ces éléments, les numérotés, les énumérer ….

Définition 2 : Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

- On appelle intersection de A et B l'ensemble des éléments de E appartenant à A et à B. On note AnB et on lit A inter B. x€ AnB implique que x € A et x € B
- On appelle réunion de A et B l'ensemble des éléments de E appartenant à A ou à B on note AUB et on lit A union B $x€AUB\ implique\ que\ x€A\ ou\ x€B$

  Exp : A= $\{a; b; c; d; e; f; g; h\}$ B= $\{c; d; f; i; j; k; l\}$

  AnB= $\{c; d; f\}$ AUB= $\{a; b; c; d; e; f; g; h; i; j; k; l\}$

* CARDINAL D'UN ENSEMBLE

Activité : Soit E les jours de la semaine. Quel est le cardinal de E.

Définition : On appelle cardinal d'un ensemble le nombre d'élément de cet ensemble. Soit A un ensemble on note Card(A).

Propriété :

- Card(ϕ)= 0
- Card(A× $B) = Card(A) \times Card(B)$
- Card(AUB)= Card(A)+ $Card(B) - Card(AnB)$
- Si AnB=ϕ alors Card(AUB)= Card(A) + Card(B)
- Card (A/B)= CardA – Card(AnB)
- Card (B/A)= CardB – Card(AnB)

Exp : Card(A)= 5 Card(B)= 6 Card(AnB)= 2

Card(AUB)= 5+6 – 2= 9

* COMPLEMENTAIRE D'UN ENSEMBLE

On appelle complémentaire de A dans E l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A. On note C_E^A ou A barre et on lit complémentaire de A dans E.

Propriété : Card(A) barre = Card(E) – Card(A)

I-2 : TABLEAU A DOUBLE ENTREE

Activité : On donne E= $\{a; b; c\}$ F= $\{1; 2; 3; 4\}$

1) Calculons E× E
2) Déterminer Card(E× F)

SOLUTION :

	1	2	3	4
a	(a, 1)	(a, 2)	(a, 3)	(a, 4)
b	(b, 1)	(b, 2)	(b, 3)	(b, 4)
c	(c, 1)	(c, 2)	(c, 3)	(c, 4)

1) **E×** $\boldsymbol{F = \{(a,1);(a,2);(a,3);(a,4);(b,1);(b,2);(b,3);(b,4);(c,1);(c,2);(c,3);(c,4)\}}$
2) **Card(E×** $\boldsymbol{F) = CardE \times Card = 3 \times 4 = 12}$

Définition : Soit A et B deux ensembles quelconques. On appelle produit cartésien de A par B que l'on note A× B l'ensemble des couples $(x; y)$ ou $x€A$ et $y€B$

RQ : A× B est $différent$ de $B \times A$ $puis$ que le $couple$ $(x; y)$ est $différent$ du $couple$ $(y; x)$

EXERCICE D'APPLICATION :

Jidas envisage de se lancer dans la vente des produits vivriers. Le comportement du marché dépend de la conjecture et de la concurrence.

La conjecture est soit bonne, soit mauvaise : On note respectivement b et m.

La concurrence est soit rude, soit faible, soit inexistante : On note respectivement r ; f et i.

Soit A les éléments de la conjecture et B les éléments de la concurrence.

1) Déterminer CardA ; CardB ; Card(AnB) ; Card(AUB) et Card(A× B)
2) Déterminer A× B et $vérifier$ son $cardinal.$

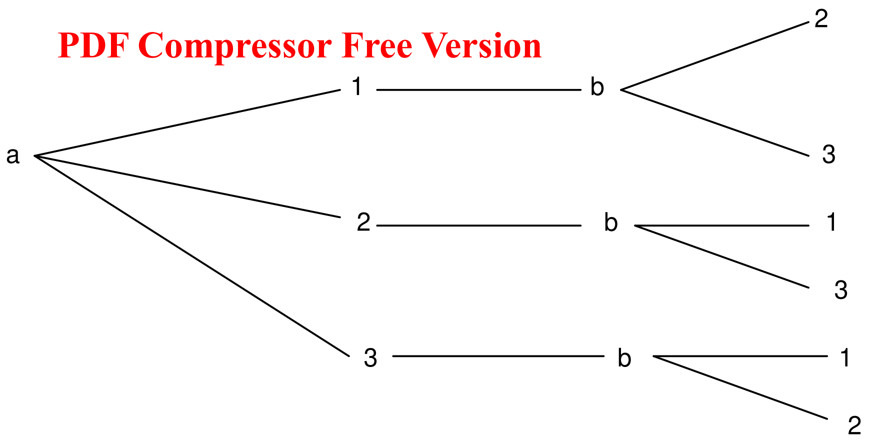
I-3 : ARBRE DE CHOIX

On peut également utiliser l'arbre de choix pour résoudre certains exercices sur les dénombrements.

Exp : Soit E=$\{a; b\}$ et F=$\{1; 2; 3\}$

Combien d'application injective peut-on former de E vers F ?

Solution :



On peut former 6 injections de E vers F.

1-4 : **DIAGRAMMES**

Les diagrammes font aussi parti des outils pouvant utiliser pour résoudre des exercices sur les dénombrements.

Exp : Les 50 élèves d'une classe de 1^{ere} A4 disposent de deux options sportives, l'athlétisme et la natation. 27 élèves pratiquent l'athlétisme ; 29 élèves pratiquent la natation et 5 élèves ne pratiquent aucun des deux sports. Déterminer les nombres d'élèves qui pratiquent uniquement l'athlétisme, ceux qui pratiquent uniquement la natation et ceux qui pratiquent les deux sports.

Leçon 2 : **TECHNIQUES DE DENOMBREMENT** **Durée : 2h**

Objectifs pédagogiques :

- Utiliser les outils (P-uplets ; arrangements ; combinaison) pour dénombrer un ensemble.

II-1 : P-uplet

Activité : On dispose de 4 livres a ; b ; c et d qu'on veut ranger dans trois tiroirs numérotés 1 ; 2 et 3.

Déterminer le nombre de façon possible de ranger ces livres. ($3^4 = 81$ façons)

Définition : Le nombre de P-uplet d'un ensemble à n élément n^P (4 uplet dans 3 éléments)

Exp : On dispose de trois billets qu'on veut ranger dans deux boites. Combien de façon peut-on ranger ? $2^3 = 8$ façons possibles.

II-2 : ARRANGEMENTS

Activité : Soit E= $\{a; b\}$; F= $\{1; 2; 3\}$

Combien d'application injective peut-on former de E vers F ?

Définition : Soit E un ensemble à n éléments et

$P \leq n$ *un entier naturel non nul on appelle Arrangement de P élément de E tout P − uplet deux à deux distints.*

Propriété : Le nombre d'arrangement de P élément d'un ensemble E à n élément est noté A^P_n et on lit arrangement de P dans n. $A^P_n = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots(n-P+1)$

Exp : $A^3_7 = 7(7-1)(7-2) = 7 \times 6 \times 5 = 210$

- **Notion du factorielle**

Soit n un nombre entier naturel. On appelle factorielle n le nombre entier noté n ! Tel que : $n! = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1$.

Exp : $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ $\qquad$ $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

Propriété : Soit n et P deux entiers naturels non-nuls tels que $P \leq n$ *on a* : $A^P_n = \frac{n!}{(n-P)!}$

RQ : $A^0_n = 1$; $A^n_n = n!$ $\qquad$ **Exp** : $A^2_3 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$.

Exercice :

1) Une assemblée de 10 personnes veut élire un bureau composé d'un président, d'une secrétaire et d'un trésorier. Sachant qu'il n'y a pas accumulation des postes ; combien y'a-t-il de bureaux possibles ?

II-3 : PERMUTATION

Définition : Soit E un ensemble à n élément. On appelle permutation de E tout arrangement de n élément de E **exple** : toute permutation de $E = \{a; b; c\}$ est définie par : (a ; b ; c) ;(b ; c ;a) ;(c ; a ;b) ;(b ; a ;c) ;(a ; c ;b) et (c ; b ; a)

Propriété : le nombre de permutation d'un ensemble à n éléments est noté $n! = A^n_n$.

Exercice : Déterminer le nombre de façon de disposer 6 drapeaux de 6 pays différents sur 6 mats prévu à cet effet.

II-4 : COMBINAISONS

Définition : Le nombre de partie ayant P éléments d'un ensemble fini ayant n éléments avec $P \leq n$ *est appellé combinaison de P dans n et définie par*: $C^P_n = \frac{n!}{P!(n-P)!}$

Exp : $C^2_6 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$

Propriété : $C^0_n = C^n_n = 1$; $C^1_n = n$

Exercice : On possède d'une collection de timbres différents. 5 sont rouges ; 4 bleus et 3 verts.

1) Combien y'a-t-il de manière de constituer 5 timbres ?

2) Parmi les pochettes qui sont possibles de constituer combien ce compose de deux timbres rouges, deux bleus et un vert ?

Leçon 3 : PROBLEME DE DENOMBREMENT **Durée : 1h**

Objectif pédagogique : Utiliser les règles pour résoudre les problèmes de dénombrement.

III-1 : REGLE D'ADDITION ET DE MULTIPLICATION

- Dans un exercice sur les dénombrements, on utilise l'addition lorsqu'on a à faire au mot **ou.**
- La multiplication lorsqu'on a à faire au mot **et.**

III-2 : PROBLEMES DE TIRAGE

Pour déterminer le nombre de tirages de P éléments d'un ensemble E à n élément (P$\leq n$) *on peut utiliser le tableau suivant*:

Modélisation	Les P éléments sont ordonnés	Les P éléments sont distincts	outils	Nombre de tirages
Tirages successifs avec remise	oui	non	P-uplet de E	n^P
Tirages successifs sans remise	oui	oui	Arrangement de P éléments de E	A^P_n
Tirages simultanés	non	oui	Combinaison de P éléments de E	C^P_n

Bon à savoir :

- Tirer au moins une boule c'est tirer une boule ou tirer plus d'une boule.
- Tirer au plus trois boules c'est tirer trois boules ou tirer moins de trois boules.
- Tirer exactement deux boules c'est tirer deux boules.
- Lorsqu'on parle de choix ou de tirage simultané il s'agit de la combinaison.

EXERCICE D'APPLICATION : Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules blanches. On tire simultanément 2 boules de l'urne.

1) Calculer le nombre de tirage comportant les boules de même couleurs.
2) Calculer le nombre de tirage comportant les boules de couleurs différentes.
3) Calculer le nombre de tirage comportant au moins une boule rouge.

Chapitre 5 : Etude d'une fonction numérique - Transformations simples

Leçon 1 : Fonctions associées

Plan de la leçon

1.1. Symétries et translation

1.2. Fonctions associées $x \mapsto f(x-a)$, $x \mapsto f(x)+b$ et $x \mapsto f(x-a)+b$

1.3. Fonctions associées $x \mapsto -f(x)$ et $x \mapsto f(-x)$

1.4. Fonctions associées $x \mapsto |f(x)|$ et $x \mapsto f(|x|)$

1.1. Symétries et translation

Activité d'apprentissage :

ABCD est un carré de centre O.

a) Construire l'image de ABCD par la symétrie de centre D.

b) Construire l'image de ABCD par la symétrie par rapport à la droite (CD).

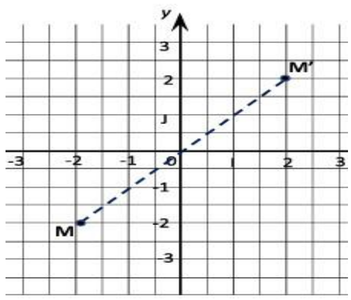
c) Construire l'image de ABCD par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Résumé :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O,I,J).

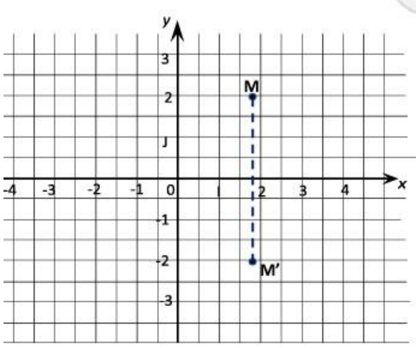
Soient $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux points, et $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$un vecteur.

•Symétrie de centre O :



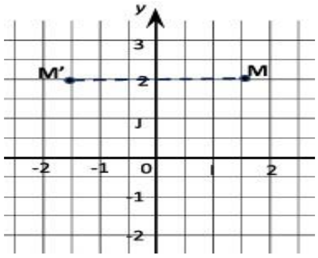
Le point M'est l'image du point M par la symétrie de centre le point O signifie que le point O est le milieu du segment [MM'].
La symétrie de centre O est notée So .

- **Symétrie orthogonale d'axe (OI) :**



Le point M' est l'image du point M par la symétrie orthogonale d'axe (OI) signifie que l'axe (OI) est la médiatrice du segment [MM']. La symétrie orthogonale d'axe (OI) est notée $S_{(OI)}$.

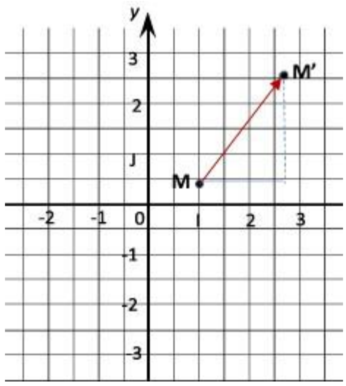
- **Symétrie orthogonale d'axe (OJ) :**



Le point M' est l'image du point M par la symétrie orthogonale d'axe (OJ) signifie que l'axe (OJ) est la médiatrice du segment [MM'].

La symétrie orthogonale d'axe (OJ) est notée $S_{(OJ)}$.

- **Translation de vecteur $\vec{u}$:**



Le point M' est l'image du point M par la translation de vecteur $\vec{u}$ signifie que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Transformer une figure par translation revient à la faire glisser. Ce glissement est défini par une direction, un sens et une longueur.

La translation de vecteur $\vec{u}$ est notée $t_{\vec{u}}$.

Application :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O,I,J).

1) Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}(3;-2)$ et les points $A\binom{-2}{-1}$ et $B\binom{3}{2}$.

Placer les points A et B dans le repère, ainsi que leurs images respectives A' et B' par $t_{\vec{u}}$.

2) Soit So la symétrie de centre O et les points $A\binom{-2}{2}$ et $B\binom{3}{-2}$.

Placer les points A et B dans le repère, ainsi que leurs images respectives A' et B' par So.

3) Soit $S_{(OI)}$ la symétrie orthogonale d'axe (OI) et les points $A\binom{-2}{-1}$ et $B\binom{3}{2}$.

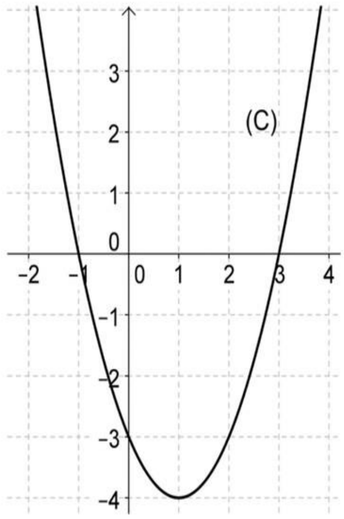
Placer les points A et B dans le repère, ainsi que leurs images respectives A' et B' par $S_{(OI)}$.

4) Soit $S_{(OJ)}$ la symétrie orthogonale d'axe (OJ) et les points $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$.

Placer les points A et B dans le repère, ainsi que leurs images respectives A' et B' par $S_{(OJ)}$

1.2. Fonctions associées $x \mapsto f(x-a)$, $x \mapsto f(x)+b$ et $x \mapsto f(x-a)+b$

Activité d'apprentissage :



Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O,I,J).

La courbe (C) ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f sur l'intervalle [-2 ;4].

Soit g, h et k les fonctions définies par :

$g(x) = f(x-1)$, $h(x) = f(x) + 4$ et $k(x) = f(x-1) + 4$.

a) Recopie et complète le tableau suivant :

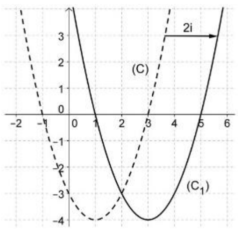
X	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)						0	
g(x)				-3			
h(x)	8						
k(x)		8					

b) Utilise ce tableau pour construire les courbes (Cg), (Ch) et (Ck) respectives des fonctions g, h et k.

Résumé :

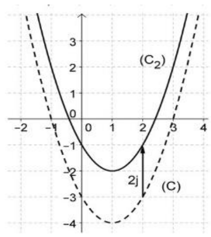
Le plan est muni d'un repère orthogonal (O,I,J).

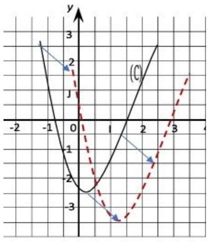
Soit f une fonction numérique de représentation graphique (C).



• La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x-a)$ est l'image de la courbe (C) par la translation de vecteur $\vec{u}(a;0)$.

- La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x) + b$ est l'image de la courbe (C) par la translation de vecteur $\vec{u}(0; b)$.





- La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x - a) + b$ est l'image de la courbe (C) par la translation de vecteur $\vec{u}(a; b)$.

Propriétés :

P1) Toute fonction polynôme du second degré f peut s'écrire sous la forme :

$f(x) = \alpha(x - a)^2 + b$ avec $\alpha \neq 0$, a et b des nombres réels. Sa courbe représentative est l'image de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \alpha x^2$ par la translation de vecteur $\vec{u}(a; b)$.

Exemple 1 : Pour $f(x) = 4x^2 - 8x + 6$, nous avons $f(x) = 4(x - 1)^2 + 2$.

Donc la courbe représentative de f est l'image de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 4x^2$ par la translation de vecteur $\vec{u}(1; 2)$.

P2) Toute fonction homographique f peut s'écrire sous la forme :

$f(x) = b + \frac{\beta}{x-a}$ avec $\beta \neq 0, a$ *et* b des nombres réels. Sa courbe représentative est l'image de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{\beta}{x}$ par la translation de vecteur $\vec{u}(a; b)$.

Exemple 2 : Pour $f(x) = \frac{x}{x-1}$, nous avons $f(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$.

Donc la courbe représentative de f est l'image de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ par la translation de vecteur $\vec{u}(1; 1)$.

Application :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O,I,J).

1- Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur [-3 ; 3] par $f(x) = x^2$.

a) Construire la courbe (Cf) représentative de la fonction f.

b) En déduire les courbes (C1), (C2) et (C3) représentatives respectives des fonctions : $x \mapsto f(x - 1)$, $x \mapsto f(x) - 2$ et $x \mapsto f(x - 1) - 2$.

2- Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur [-4 ; 4] par $g(x) = \frac{1}{x}$.

a) Construire la courbe (Cg) représentative de la fonction g.

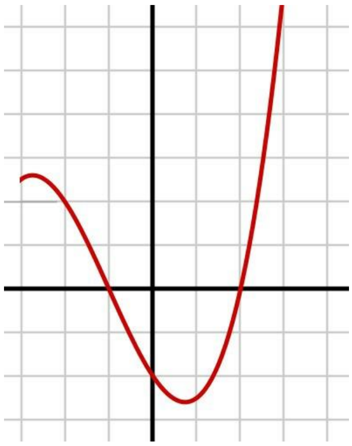
b) En déduire les courbes (C4), (C5) et (C6) représentatives respectives des fonctions : $x \mapsto g(x-2)$, $x \mapsto g(x)+1$ et $x \mapsto g(x-2)+1$.

1.3. Fonctions associées $x \mapsto -f(x)$ et $x \mapsto f(-x)$

Activité d'apprentissage :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O,I,J).

La courbe (C) ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f sur l'intervalle [-3 ;3].



Soit g et h les fonctions définies par :

$$g(x) = -f(x) \;\; et \;\; h(x) = f(-x)\,.$$

a) Recopie et complète le tableau suivant :

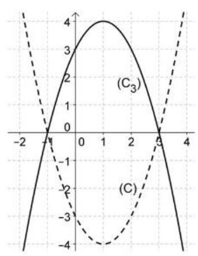
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)							6
g(x)				2			
h(x)		0					

b) Utilise ce tableau pour construire les courbes (Cg) et (Ch) respectives des fonctions g et h.

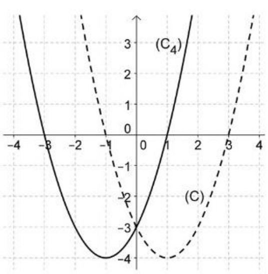
Résumé :

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O,I,J).

Soit f une fonction numérique de représentation graphique (C).



- La courbe représentative de la fonction $x \mapsto -f(x)$ est l'image de la courbe (C) par la symétrie d'axe (OI).



- La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(-x)$ est l'image de la courbe (C) par la symétrie d'axe (OJ).

Application :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O,I,J).

1. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur [-2 ; 4] par $f(x) = (x-1)^2 - 2$.
   a. Construire la courbe (Cf) représentative de la fonction f.
   b. En déduire les courbes (C1) et (C2) représentatives respectives des fonctions : $x \mapsto -f(x)$ et $x \mapsto f(-x)$
2. Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur [-2 ; 6] par $g(x) = \frac{1}{x-2}$.
   a. Construire la courbe (Cg) représentative de la fonction g.
   b. En déduire les courbes (C3) et (C4) représentatives respectives des fonctions : $x \mapsto -g(x)$ et $x \mapsto g(-x)$

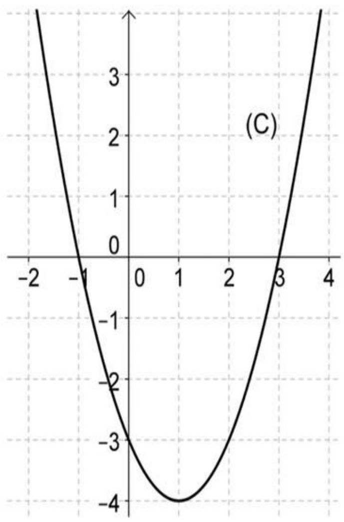
(Note au prof : Ces fonctions f et g sont censées avoir été tracées dans l'application précédente).

1.4. Fonctions associées $x \mapsto |f(x)|$ et $x \mapsto f(|x|)$

Activité d'apprentissage :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O,I,J).

Soit la fonction f définie sur l'intervalle [-2 ;4] dont la courbe (C) ci-contre est la représentation graphique.



Soit g et h les fonctions définies par :

$g(x) = |f(x)|$ *et* $h(x) = f(|x|)$.

a) Recopie et complète le tableau suivant :

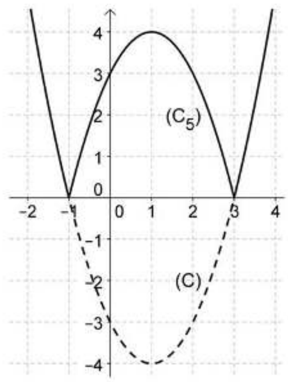
x	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)						0	
g(x)				4			
h(x)	-3						

b) Utilise ce tableau pour construire les courbes (Cg) et (Ch) respectives des fonctions g et h.

Résumé :

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O,I,J).

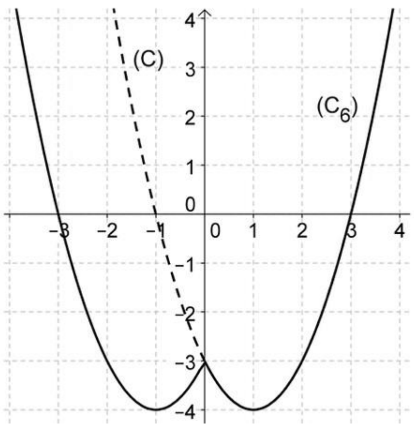
Soit f une fonction numérique de représentation graphique (C).



• La courbe représentative de la fonction $x \mapsto |f(x)|$ est obtenue de la façon suivante :

- on garde la partie de la courbe (C) correspondant aux valeurs positives de $f(x)$;

- on trace de plus l'image de l'autre partie par la symétrie orthogonale d'axe (OI).



• La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(|x|)$ est obtenue de la façon suivante :

-on garde la partie de (C), notée (C') ; correspondant aux valeurs positives de x

- on trace de plus l'image de (C') par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).

Application :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O,I,J).

1. **Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur [-2 ; 4] par $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$.**
   a. **Construire la courbe (Cf) représentative de la fonction f.**
   b. **En déduire les courbes (C1) et (C2) représentatives respectives des fonctions : $x \mapsto |f(x)|$ et $x \mapsto f(|x|)$**
2. **Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur [-4 ; 4] par $g(x) = \frac{1}{x}$.**
   a. **Construire la courbe (Cg) représentative de la fonction g.**
   b. **En déduire les courbes (C3) et (C4) représentatives respectives des fonctions : $x \mapsto |g(x)|$ et $x \mapsto g(|x|)$**

Leçon 2 : Etude des fonctions polynômes et homographiques

Plan de la leçon

2.1. Plan d'étude d'une fonction

Activité d'apprentissage :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J).

Soient f et g les fonctions définies respectivement sur [-4 ;4] et [-3 ;0[U]0 ;3] par : $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.

On désigne par (Cf) et (Cg) leurs courbes représentatives respectives.

Pour chacune de ces fonctions :

- **Préciser le domaine de définition.**
- **Étudier la parité et interpréter le résultat.**
- **Calculer les limites aux bornes du domaine de définition, puis préciser les asymptotes éventuelles à la courbe.**
- **Calculer la dérivée et en déduire le sens de variation.**
- **Tracer le tableau de variation.**
- **Déterminer s'ils existent, les coordonnées des points de rencontres de la courbe représentative avec les axes du repère.**
- **Tracer les tangentes et asymptotes éventuelles.**
- **Construire la courbe.**

Résumé :

Étudier une fonction revient à :

- **Préciser son domaine de définition ;**

- Étudier éventuellement sa parité afin de réduire le domaine d'étude de la fonction ;

- Calculer les limites aux bornes de son domaine de définition et préciser les asymptotes éventuelles sa la courbe ;

- Calculer sa dérivée et en déduire son sens de variation.

- Tracer son tableau de variation ;

- Rechercher éventuellement les points remarquables à sa courbe (points d'intersection avec les axes de coordonnées, …) ;

- Compléter ces points avec d'autres points judicieusement choisis en fonction de son domaine de définition ;

- tracer ses tangentes et asymptotes éventuelles ;

- Construire sa courbe en mettant éventuellement en évidence les éléments de symétrie.

NB : ***Pour le tracé de la courbe, une table des valeurs de la fonction est nécessaire.***

Application :

Étudier et représenter graphiquement chacune des fonctions suivantes sur I :

$a)\ f(x) = \frac{1}{2}x^2$ **et I= [-3 ;3]**

$b)\ g(x) = \frac{1}{x}$ **et I= [-4 ;4]**

2.2. Fonctions polynômes de degré 2

Définition :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

f **est une fonction polynôme de degré 2 si on peut l'écrire sous la forme :**

$f(x) = ax^2 + bx + c$ **où** a, b **et** c **sont trois nombres réels avec** $a \neq 0$**.**

Exemple : La fonction f **définie sur** $\mathbb{R}$ **par** $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ **est une fonction polynôme de degré 2.**

Exemples d'études de fonctions polynômes :

• Etude de la fonction $f: x \mapsto x^2 + 4x + 3$ **sur I= [-5 ;1]**

Domaine de définition : Df = [-5 ;1]

Étude aux bornes du domaine de définition : On a $f(-5) = f(1) = 8$.

Dérivée et sens de variation : f est une fonction polynôme donc est dérivable sur son ensemble de définition, et sa dérivée est définie par : $f'(x) = 2x + 4$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$, d'où le tableau de signe de f' est :

x	-5		-2		1
$f'(x)$		-	0	+	

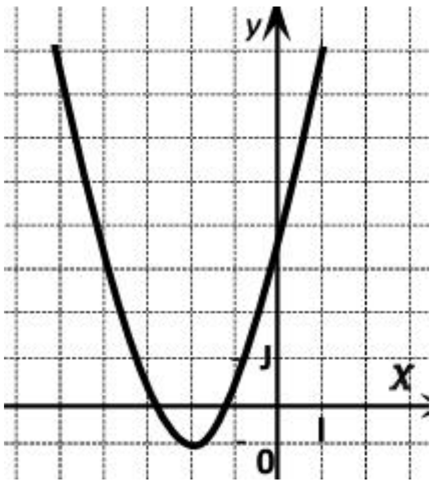
On déduit donc que f est décroissante sur $[-5; -2]$ et croissante sur $[-2; 1]$.

Tableau de variation :

x	-5		-2		1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	8	↘		↗	8
			-1		

Table des valeurs :

x	**-5**	**-4**	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**
$f(x)$	**8**	**3**	**0**	**-1**	**0**	**3**	**8**



courbe représentative

- **Etude de la fonction $g : x \mapsto -x^2 + x + 2$ sur I= [-2 ;3]**

Domaine de définition : Dg = [-2 ;3]

Étude aux bornes du domaine de définition : On a $g(-2) = g(3) = -4$.

Dérivée et sens de variation : g est une fonction polynôme donc est dérivable sur son ensemble de définition, et sa dérivée est définie par : $g'(x) = -2x + 1$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$, d'où le tableau de signe de g' est :

x	-2		1/2		3
$g'(x)$		+	0	-	

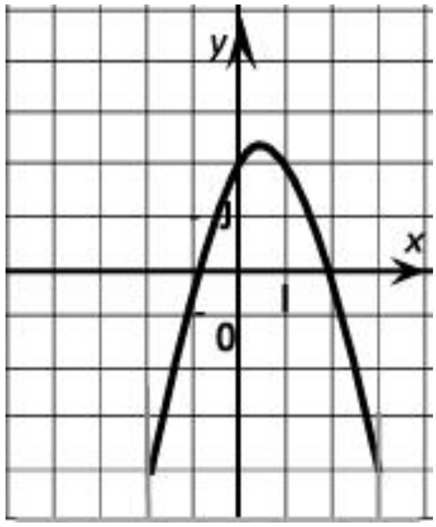
On déduit donc que g est croissante sur $\left[-2;\frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{2};3\right]$.

Tableau de variation :

x	-2		1/2		3
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	-4	↗	$\frac{9}{4}$	↘	-4

Table des valeurs :

x	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	-4	0	2	2	0	-4



Courbe représentative:

Application :

Étudier et représenter graphiquement chacune des fonctions suivantes sur I :

$a)\ f(x) = x^2 - 3x + 2$ **et I= [-2 ;5] ;** $b)\ g(x) = -x^2 + 4x + 5$ **et I= [-2 ;6]**

2.3. Fonctions homographiques

Définition1 :

Soient a, b, c et d quatre réels avec $a \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.

La fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ par : $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ s'appelle une fonction homographique.

Remarque : La valeur « interdite » $-\frac{d}{c}$ est celle qui annule de dénominateur.

Exemple de fonction homographique : $f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$ définie sur [-4 ;-1[U]-1 ;2]

Définition2 : Le plan est muni d'un repère orthogonal (O,I,J) .

Soit f une fonction numérique et a un nombre réel. On dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f si f n'est pas définie en a et si la limite de f en a est infinie.

<u>Exemple</u> : La fonction f définie sur [-4 ;-1[U]-1 ;2] par **:** $f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$ **a pour asymptote verticale la droite d'équation $x = -1$.**

<u>Exemples d'études de fonctions homographiques :</u>

• **Etude de la fonction $f: x \mapsto \frac{3x+2}{x+1}$ sur I= [-4 ;-1[U]-1 ;2]**

Domaine de définition : $f(x)$ existe si et seulement si $x + 1 \neq 0$, i.e : $x \neq -1$

Donc Df = [-4 ;-1[U]-1 ;2]

Étude aux bornes du domaine de définition : On a $f(-4) = \frac{10}{3}$ et $f(2) = \frac{8}{3}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} 3x + 2 = -1 \\ \lim\limits_{x \to -1^-} x + 1 = 0^- \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^+} 3x + 2 = -1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} x + 1 = 0^+ \end{cases}$$

donc $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

Ainsi, la droite d'équation $\boldsymbol{x = -1}$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f.

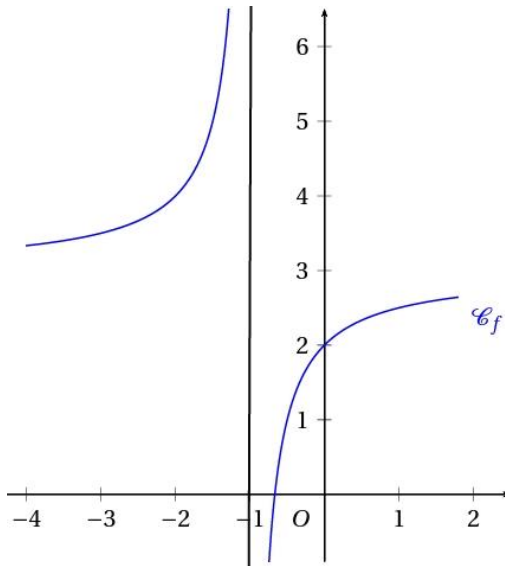
Dérivée et sens de variation : f est une fonction rationnelle donc est dérivable sur chacun des intervalles de son ensemble de définition, et sa dérivée est définie par : $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$, donc f est strictement croissante sur [-4 ;-1[**et sur**]-1 ;2].

Tableau de variation :

x	-4		-1		2
$f'(x)$		+	||	+	
$f(x)$	$\frac{10}{3}$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$\frac{8}{3}$

Table des valeurs :

x	**-4**	**-3**	**-2**	**0**	**1**	**2**
$f(x)$	**10/3**	**7/2**	**4**	**2**	**5/2**	**8/3**



<u>courbe représentative</u>

• **Etude de la fonction $g: x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$ sur I = [-2 ;2[U]2 ;6]**

Domaine de définition : $g(x)$ existe si et seulement si $x - 2 \neq 0$, i.e : $x \neq 2$

Donc Dg = [-2 ;2[U]2 ;6]

Étude aux bornes du domaine de définition : On a $g(-2) = \frac{1}{4}$ et $g(6) = \frac{7}{4}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} x + 1 = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} x - 2 = 0^- \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^+} x + 1 = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} x - 2 = 0^+ \end{cases}$$

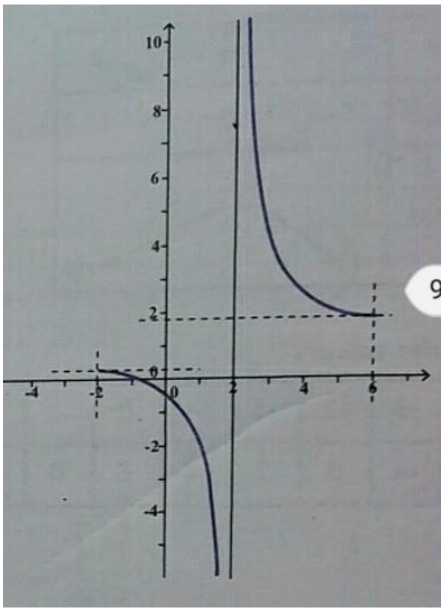
donc $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = +\infty$

Ainsi, la droite d'équation $\boldsymbol{x = 2}$ est asymptote verticale à la courbe représentative de g.

Dérivée et sens de variation : g est une fonction rationnelle donc est dérivable sur chacun des intervalles de son ensemble de définition, et sa dérivée est définie par : $\boldsymbol{g}'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$, donc $\boldsymbol{g}$ est strictement décroissante sur [-2 ;2[**et sur**]2 ;6].

Tableau de variation :

x	-2		2		6
$\boldsymbol{g}'(x)$		-	||	-	
$\boldsymbol{g}(x)$	$\frac{1}{4}$ ↘		$-\infty$ || $+\infty$	↘	$\frac{7}{4}$



courbe représentative

Table des valeurs :

x	-2	-1	0	1	3	4	5	6
$\boldsymbol{g}(x)$	1/4	0	-1/2	-2	4	5/2	2	7/4

Application :

a) $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{x} \mapsto \frac{-x+2}{2x-3}$ **sur I = [-2 ; $\frac{3}{2}$[U] $\frac{3}{2}$;5]**

b) $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{x} \mapsto \frac{-2x+5}{x-3}$ **sur I = [-1 ; 3[U]3 ;7]**

<u>REMARQUE</u> : Quand on connaît l'écriture d'une fonction, on peut préciser son ensemble de définition et déterminer son sens de variation. On complète ensuite un tableau de valeurs pour faire sa représentation graphique. Réciproquement, on peut partir de la représentation graphique d'une fonction pour trouver son ensemble de définition et déduire son tableau de variation. On peut également utiliser les représentations graphiques de fonctions pour résoudre des équations ou des inéquations. (***Le prof cherchera des exercices à titre d'illustrations***).

CHAP 6 : STATISTIQUES

Objectifs :

-savoir présenter les données d'une série statistique à l'aide d'un tableau

-déterminer les caractéristiques d'une série statistique

-représenter les données graphiquement.

RAPPELS

Activité 1

Une enquête portant sur la région d'origine de certains élèves d'une classe de première littéraire a donné les résultats suivants : Centre, Nord, Sud, Sud, Sud, Centre, Ouest, Centre, Ouest, Nord, Nord, Centre, Centre, Ouest, Ouest.

1) Comment appelle-t-on l'ensemble sur lequel porte cette étude?
2) Cette étude porte-t-elle sur tous les élèves de cette classe ?
3) Comment appelle-t-on les élèves interrogés ?
4) Quel nom donne-t-on à l'objet sur lequel porte cette enquête ?
5) Comment appelle-t-on ces différentes réponses proposées par les élèves ?
6) Le caractère étudié est-il qualitatif ou quantitatif ? justifier votre réponse.
7) Recopier et compléter le tableau suivant :

Modalité	Centre	Nord	Ouest	Sud	Total
Effectif					
Fréquence					

Vocabulaire et définitions

- L'ensemble sur lequel porte une étude statistique est appelé population.
- Une partie de la population est appelée échantillon.
- L'objet sur lequel porte l'étude statistique est appelé caractère.
- Les valeurs du caractère sont les modalités (x_i).
- Si les modalités sont des nombres le caractère est dit quantitatif sinon il est dit qualitatif.
- Le nombre d'élément d'une modalité est l'effectif de cette modalité (n_i).
- Le nombre total d'individus d'une série est appelé effectif total (N).
- La fréquence d'une modalité (f_i) est le quotient de l'effectif de cette modalité par l'effectif total.
  on a donc : $f_i = \frac{n_i}{N}$.
  En pourcentage, on a : $f_i(\%) = \frac{n_i}{N} \times 100$.

I. CARACTERISTIQUES D'UNE SERIE STATISTIQUE

I.1) Les caractéristiques de position

Activité 2

Les notes suivantes sont celles obtenues par les élèves d'une classe de première littéraire en Mathématiques : 12, 19, 16, 8, 12, 13, 10, 8, 16, 8, 10, 13, 11, 11, 8, 12, 8, 11.

1) Quelle est la nature du caractère étudié dans cette série ?
2) Recopier et compléter le tableau suivant :

Modalité (x_i)	8	10	11	12	13	16	19	Total
Effectif (n_i)								
Effectif cumulé croissant (ECC)								
Effectif cumulé décroissant (ECD)								
$n_i \times x_i$								

3) Quelle est la modalité ayant le plus grand effectif ?
4) Quelle est la modalité dont l'ECC et l'ECD sont tous deux supérieurs ou égaux à $\frac{N}{2}$.
5) Calculer $\frac{\sum n_i \times x_i}{N}$.

Résumé

- Le mode d'une série statistique est la modalité ayant le plus grand effectif.
- La moyenne d'une série statistique est la quantité noté $\bar{x}$ et donnée par : $\bar{x} = \frac{\sum n_i \times x_i}{N}$.
  N.B : le symbole $\sum$ se lit «somme ».
- La médiane est le nombre noté M_e tel que 50% des modalités sont $\leq$ à M_e et 50% $\geq$ à M_e. La médiane est également la modalité donc les effectifs cumulés croissants et décroissants sont tous deux supérieurs ou égaux à la moitié de de l'effectif total.
  N.B : si deux modalités ont leurs effectifs cumulés croissants et décroissants tous deux $\geq$ à $\frac{N}{2}$, on convient de prendre pour médiane la demi somme des deux modalités.
  Interprétation de la médiane de l'activité 2 : une moitié des élèves a une note de mathématiques $\leq$ à M_e =11 et l'autre moitié a une note $\geq$ à 11.

  Remarques :
  - ✓ Une série statistique peut avoir plusieurs modes.
  - ✓ On ne calcule pas la moyenne d'une série statistique à caractère qualitatif.
  - ✓ La médiane d'une série statistique n'est pas toujours une modalité de cette série.

  Vocabulaire : le mode, la médiane et la moyenne sont appelées caractéristiques de position.

I.2) Les caractéristiques de dispersion

Activité 3

Reprenons l'activité 2. Recopier et compléter le tableau suivant puis calculer les nombres :

$V = \frac{\sum n_i \times x_i^2}{N} - (\bar{x})^2$ et $\sigma = \sqrt{V}$.

Modalité(x_i)	8	10	11	12	13	16	19	Total
Effectif(n_i)								
$n_i \times x_i$								
$n_i \times x_i^2$								

Résumé :

Soit (x_i, n_i) une serie statistique d'effectif total N.

- La variance d'une série statistique est le nombre noté V et définie par $V = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$.

- L'écart type est le nombre réel noté σ et défini par $\sigma = \sqrt{V}$.

Remarques :

✓ Dans la pratique, on utilise beaucoup la formule suivante de Koenig pour le calcul de la variance : $V = \frac{\sum n_i \times x_i^2}{N} - (\bar{x})^2$.

✓ La variance et l'écart type sont des quantités positives.

Vocabulaire : la variance et l'écart type sont des caractéristiques de dispersion.

II. SERIES STATISTIQUES A MODALITES REGROUPEES EN CLASSES

II.1) REGROUPEMENT EN CLASSES

Activité 4

Le tableau ci-dessous donne les tailles, en cm, de 50 élèves d'une classe de première littéraire.

Classe	[130;140[	[140;150[	[150;160[	[160;170[	[170;180[	**Total**
Effectif (n_i)	6	15	18	**7**	**4**	50
Fréquence en % (f_i)						
Centre de la classe (c_i)						
Amplitude de la classe (a_i)						
Densité de la classe ($\frac{n_i}{a_i}$)						
$n_i \times c_i$						
$n_i \times {c_i}^2$						

1) Quel est le caractère étudié pour cette série statistique?
2) Recopier et compléter le tableau ci-dessus
3) a) Quel est le nombre d'élèves qui ont une taille ≤ 160 cm ?
   b) Quel est le pourcentage des élèves qui ont une taille ≥ 160 cm ?
4) Quelle est la classe ayant le plus grand effectif ?
5) Calculer les quantités suivantes : $\bar{x} = \frac{\sum n_i \times c_i}{N}$, $V = \frac{\sum n_i \times {c_i}^2}{N} - (\bar{x})^2$ et $\sigma = \sqrt{V}$.

Résumé :

On considère une série statistique regroupée en classes où $i = [a\,;\, b[$ est une classe de cette série.

- L'amplitude de la classe i est $b - a$.
- Le centre de la classe i est $\frac{a+b}{2}$.
- La fréquence de la classe i est donnée par : $f_i = \frac{n_i}{N}$.
- La densité d_i de la classe i est donnée par : $d_i = \frac{n_i}{a_i}$
- La classe modale d'une telle série est toute classe dont la densité est la plus grande.
- Le mode d'une telle série est le centre de la classe modale.
- L'effectif cumulé croissant (resp. effectif cumulé décroissant) relatif à une classe i (ECC_i) (resp. (ECD_i)) est la somme des effectifs de cette classe et de celles qui la précèdent (resp. suivent).
- La fréquence cumulée croissante (resp. fréquence cumulée décroissante) relative à un classe (FCC_i) (resp. (FCD_i)) est la somme des fréquences de cette classe et de celle qui la précèdent (resp. suivent).
- La moyenne, la variance et l'écart type d'une série statistique regroupée en classes sont respectivement données par :

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i \times c_i}{N},\quad V = \frac{\sum n_i \times {c_i}^2}{N} - (\bar{x})^2 \text{ et } \sigma = \sqrt{V}.$$

Remarques :

✓ Une série statistique peut avoir plusieurs classes modales et plusieurs modes.

✓ Dans une série statistique regroupée en classes de même amplitude, la classe modale est simplement la classe de plus grand effectif.

- ✓ Dans une série statistique regroupée en classes d'amplitudes différentes, la classe d'effectif maximal n'est pas toujours la classe modale (voir Exemple 2 ci-dessous).
- ✓ On a aussi : $FCC_i = \frac{ECC_i}{N}$ et $FCD_i = \frac{ECD_i}{N}$ où N est l'effectif total.

Calcul de la médiane d'une serie statistique regroupée en classes :

Cas pratique :
Calculer la médiane de la série statistique de l'activité 4.

Solution :
Utiliser le tableau correspondant des ECC du tableau de cette série :

taille (cm)	130	140	150	160	170	180
ECC	0	6	21	39	46	50

On a : $\frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25 = ECC_{M_e}$, donc $ECC_{M_e} \in [21; 39[$, par conséquent, $M_e \in [150; 160[$. D'où le tableau :

Taille(cm)	150	M_e	160
ECC	21	25	39

Ainsi, $\frac{25-21}{M_e-150} = \frac{39-21}{160-150}$ d'où $M_e = 152,5$.

II.2) REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

II.2.1) Histogrammes

Dans un histogramme, chaque classe est représentée par un rectangle. Chaque rectangle de l'histogramme a pour base l'amplitude d'une classe.

a) Regroupement en classe de même amplitude
Dans ce cas la hauteur d'un rectangle est proportionnelle à l'effectif (ou à la fréquence) de la classe qu'elle représente.
Exemple1 : reprenons la série statistique relative à la taille des élèves. Choisissons de représenter 2 élèves par une aire de 1 cm^2 et une taille de 10 cm par 1 cm.
Représentation : (confère classe de 3$^{\text{ème}}$)

b) Regroupement en classe d'amplitudes différentes
Dans ce cas la hauteur d'un rectangle est proportionnelle à sa densité.
Exemple 2 : les résultats de fin d'année des 275 élèves d'un collège sont consignés dans le tableau suivant :

Moyenne	[0 ; 6.5 [	[6.5 ; 10 [	[10 ; 20 [
Effectif	65	70	140

Représenter l'histogramme de cette série.

Solution:

Moyenne	[0 ; 6.5 [	[6.5 ; 10 [	[10 ; 20 [
Effectif	65	70	140
amplitude	6.5	3.5	10
Densité	10	20	14
Hauteur	5	10	7

Nous avons décidé de représenter une moyenne de 5 par 1 cm et 2 élèves par une aire de 1 cm^2.

Représentation graphique : exercice

II.2.1) Polygones des effectifs cumulés

Activité 5

Reprenons le tableau de la série statistique relative à la taille des élèves puis complétons-la par les lignes des ECC et des ECD.

Classe	[130;140[	[140;150[	[150;160[	[160;170[	[170;180[
ECC	6	21	39	46	50
ECD	50	44	29	11	4

Le plan est muni d'un repère orthogonal

1) Placer en abscisse les extrémités des classes et en ordonnées les effectifs cumulés. On prendra 1cm pour une taille de 10cm en abscisse
1cm pour 5 élèves en ordonnée

2) Construire les points correspondants aux tableaux suivants en prenant :

Tableau 1

taille (cm)	130	140	150	160	170	180
ECC	0	21	39	46	50	50

Tableau 2

taille (cm)	130	140	150	160	170	180
ECD	50	44	29	11	4	0

3) Joindre ces points par des segments en bleu pour le Tableau 1 et en rouge pour le tableau 2.

Résumé :

- La ligne brisée obtenu en bleu est appelée polygones des effectifs cumulés croissants de la série.
- La ligne brisée obtenu en rouge est appelée polygones des effectifs cumulés décroissants de la série.

Remarques :

- ✓ La série ayant pour effectif total N, les deux polygones se coupent au point d'ordonnée $\frac{N}{2}$.
- ✓ On construit de manière analogue les polygones des fréquences cumulées de la série.

Determination graphique de la médiane d'une serie statistique regroupée en classes :

Pour déterminer graphiquement la médiane d'une série à modalités regroupées en classe, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- ✓ Tracer dans un même repère, les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants. La médiane est l'abscisse du point d'intersection de ces deux polygones.
- ✓ Tracer le polygone des fréquences cumulées croissantes. La médiane est l'abscisse du point du polygone dont l'ordonnée est 50%.

Application :

Déterminer graphiquement la médiane de la série statistique relative à la taille des élèves.

Solution :

$M_e \approx 152,5$. **Interprétation** : 50% des élèves ont une taille comprise entre 130 cm et 152,5 cm.

Remarque : L'intervalle contenant la médiane appelé intervalle médian.

GPM atelier 1èreA

Chapitre 4 : Statistiques (*version finale*)