OUVRAGE COLLABORATIF

100% GRATUIT

MATHEMATIQUES en 1ère D

Cours • Exercices

Conformes au nouveau programme en vigueur au Cameroun

Groupe WhatsApp
LES GRANDS PROFS DE MATHS

3EME EDITION

AVANT-PROPOS

Dans un contexte où l'insertion dans le monde de l'emploi est devenu de plus en plus difficile, beaucoup d'Etats ont compris qu'en ce qui concerne le système éducatif, il faut mettre l'apprenant au centre de la construction du savoir ; il faut une école soucieuse d'outiller les apprenants afin qu'ils puissent faire face à des situations de vie réelle, complexes et diversifiées. À la place d'une école coupée de la société, il faut une école intégrée, soucieuse du développement durable, et qui prend en compte les cultures et les savoirs locaux. C'est ainsi que dès 2014, le Cameroun a emboité le pas à d'autres pays africains et a ouvert les portes à l'APC qui remplacera progressivement l'APO jusqu'en classe de terminale en 2020. Pour le gouvernement, c'est un outil majeur pour atteindre l'émergence en 2035. Un groupe de jeune enseignant soucieux de l'éducation en Afrique en générale et au Cameroun en particulier a donc décidé de ne pas rester spectateur et de jouer les premiers rôles dans ce processus.

Cet ouvrage et toute la collection de la 6ème en Terminale est l'œuvre d'un groupe d'enseignant dynamique et rompu à la tâche. Ils sont réunis dans un forum whatsapp dénommé « Grandprofs de maths (GPM) ». Cette 3ème édition est le fruit de l'un de ces objectifs majeurs ; une conséquence de trois mois et demi de travail dont la partie intense s'étend du 27/07/2020 au 05/10/2020 (date de la rentrée scolaire au Cameroun.)

Destinés exclusivement à l'usage de l'enseignant, les documents de cette édition n'ont pas la prétention de remplacer les livres inscrits au programme mais d'être le complémentaire de ces derniers. Chaque leçon de cette édition respecte les dernières mises à jours qu'ont connu l'APC qui est encore jeune et en mutation au Cameroun. Ainsi, dans toutes les leçons de cette 3ème édition, il existe une forte corrélation entre la situation problème et une partie de l'activité d'apprentissage donc l'objectif est non seulement d'installer les ressources de la leçon, mais aussi de résoudre le problème posé dans la situation problème.

Cette édition doit son succès à un groupe d'enseignants de mathématiques exerçant dans toutes les régions du Cameroun. Une mention spéciale est à décerner à tous les chefs d'ateliers qui ont travaillé inlassablement pour mener ce projet à bon port ; aux administrateurs, surtout *M. Pouokam Léopold Lucien* qui a su remobilisé les troupes quand le déroulement des travaux a connu un coup à cause de le rentrée scolaire ; difficile de ne pas mentionner l'un des pédagogues dont la contribution pour la fusion des documents a été capitale, il s'agit de *M. Ngandi Michel.* Nous ne saurons terminer sans féliciter les acteurs principaux, ceux-là qui ont cru en ce projet, y ont consacré leur précieux temps et leur savoir-faire non seulement dans la réalisation d'au moins l'un des 185 chapitres du projet mais aussi pour les critiques constructives qui ont permis d'optimiser la qualité des cours produits.

La perfection étant utopique, nous avons l'intime conviction et le ferme espoir que les éventuelles coquilles que pourrait contenir un document de cette collection rencontreront l'indulgente compréhension des utilisateurs. Pour ainsi dire, nous serons ouvert aux suggestions et critiques constructives.

Tous les enseignants ou passionnés de mathématiques désirant faire partir de la famille « GPM » et disponible à participer aux futurs projets du groupe sont priés de bien vouloir écrire à l'un des administrateurs ci-dessous : *M. Guela Kamdem Pierre* **(697 473 953 / 678 009 612),** *M. Pouokam Léopold Lucien* **(696 090 236/651 993 749),** *M. Tachago Wabo Wilfried Anderson* **(699 494 671) et** *M. Ntakendo Emmanuel* **(676 519 464).** *M. GOVABOV Eric* **(696607620)**

NB : toute utilisation d'un document de cette collection à but lucratif est formellement proscrite.

Les auteurs.

Liste des enseignants ayant participé au projet dans l'atelier première D sous la coordination de M. POUOKAM NGUEGUIM Léopold Lucien.

CHAPITRES	*NOMS ET PRENOMS*	*CONTACTS*
EQUATIONS ET INEQUATIONS	PARODI NOUBISSIE	699153863
SYSTEMES LINEAIRES	PARODI NOUBISSIE	699153863
TRIGONOMETRIE	NGUETSAYA ALAIN	676706245
GENERALITES SUR LES FONCTIONS	NGO'O MBANG SERVAIS	675379667
LIMITES ET CONTINUITE	MVOUNA CLARANCE TELESPHORE	696793434
DERIVATION ET ETUDE DE FONCTIONS	OUAFEU TOKAM GUY PAULIN	676093969
SUITES NUMERIQUES	MISSI MEBANGA ISIDORE PACÔME	679180967
STATISTIQUES	WAMBA ROLIN CEDRIQUE	653000605
DENOMBREMENT	GOUABOU MOTSEBO ERIC/ EFOUBA EKASSI RUCENE	696607620/655717553
INTRODUCTION A LA THEORIE DES GRAPHES	ARMAND WASSAIN	697818473
BARYCENTRES	HAMADOU ROGER	697180064
TRANSFORMATIONS DU PLAN	FEUDJIO ALEXIS PATRICE	679141672

TABLE DE MATIERES

MODULE 21 : RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

MODULE 22 : ORGANISATION ET GESTION DES DONNEES

MODULE 23 : CONFIGURATION ET TRANSFORMATION ELEMENTAIRES DU PLAN

MODULE 21	RELATIONS ET OPÉRATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS

CHAPITRE : EQUATIONS ET INEQUATIONS

MOTIVATION : Dans plusieurs domaines de la vie, le but de certains problèmes est de déterminer une ou plusieurs quantités, soumises à certaines conditions. Très souvent, ces conditions se traduisent par une équation ou par une inéquation dont les inconnues sont des réels.

LECON 1: EQUATIONS DU SECOND DEGRE DANS ℝ *durée : 150 minutes*

COMPETENCES A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

Résoudre tout problème pouvant se ramener à une équation du second degré.

PRE-REQUIS : On considère les polynômes suivants :

$A(x) = x^2 - 2x + 3$; $B(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x + 4$; $C(x) = 3x + 2$; $D(x) = -2x^2 + 3$.

1) Donner le degré et les coefficients de chacun de ces polynômes.

2) Donner la forme canonique des polynômes A et D.

SITUATION PROBLEME :

On doit partager équitablement la somme de 7200 FCFA entre un groupe d'élèves d'une classe de Première D. Si on excluait 5 élèves de ce groupe, la part de chacun se trouverait augmentée de 20 FCFA. Quel est le nombre d'élèves de ce groupe bénéficiant de ce partage ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE 1 :

On considère le polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1) a) Montrer que $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

Dans la suite, on pose $\Delta = b^2 - 4ac$

b) Montrer que $(x) = 0$ *équivaut* à $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$.

c) On souhaite résoudre l'équation (E) : $f(x) = 0$.

i) Quelle est la condition d'existence de (E).

ii) Déterminer x lorsque $\Delta = 0$ *puis lorsque* $\Delta > 0$.

2) On suppose que le discriminant Δ est positif, et x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Calculer en fonction de a, b et c la somme $x_1 + x_2$ et le produit $x_1 . x_2$

RÉSOLUTION DE L'ACTIVITÉ 1 :

1) a) $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}\right)$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{4ac}{4a^2}\right)$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$= ax^2 + bx + c.$$

b) $f(x) = 0 \leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$

$$\leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

$$\leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

c)

i) (E) existe si et seulement si $\Delta < 0$.

ii) Si $\Delta = 0$, alors $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0$

$$\leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}.$$

Si $\Delta > 0$, alors $\leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$ ou $x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$

$$\leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad ou \quad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad ou \quad x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\leftrightarrow x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad ou \quad x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

1) $x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$= \frac{-b-\sqrt{\Delta} - b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-2b}{2a}$$

$$= \frac{-b}{a}.$$

$x_1 \,.\, x_2 = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

$$= \frac{b^2-\Delta}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}\ .$$

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE 2 :

Soit le système : $\begin{cases} xy = 7200 \\ 20x - 5y = 100 \end{cases}$

1) Montrer que ce système équivaut à l'équation $x^2 - 5x - 1800 = 0$.

2) Calculer le discriminant, puis déterminer les valeurs de x.

3) En déduire les solutions du système.

RÉSOLUTION DE L'ACTIVITÉ 2 :

1) $xy = 7200 \leftrightarrow y = \frac{7200}{x}$. En reportant dans la 2ieme équation, on a :

$$20x - 5y = 100 \quad \leftrightarrow 20x - 5\left(\frac{7200}{x}\right) = 100$$
$$\leftrightarrow 20x - \frac{36000}{x} = 100$$
$$\leftrightarrow \frac{20x^2 - 36000}{x} = 100$$
$$\leftrightarrow 20x^2 - 100x - 36000 = 0$$
$$\leftrightarrow x^2 - 5x - 1800 = 0$$

2) $\Delta = (-5)^2 - 4(1)(-1800) = 7225 \quad et \quad \sqrt{\Delta} = 85$

$x_1 = \frac{5-85}{2} = -40 \qquad x_2 = \frac{5+85}{2} = 45$

3) Or $y = \frac{7200}{x}$, d'où $y_1 = \frac{7200}{-40} = -180$ et $y_2 = \frac{7200}{45} = 160$

RESUME :

Soit a , b et c trois nombres réels avec $a \neq 0 \; et \; f(x) = ax^2 + bx + c$. On appelle $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de f.

1) La forme canonique de f est $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

2) On appelle racine ou zéro de f toute solution de l'équation $f(x) = 0$.

- Si $\Delta < 0$, alors le polynôme f n'admet pas de racines et ne peut donc être factorisé.
- Si $\Delta = 0$, alors le polynome f admet une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et sa forme factorisée est $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.
- Si $\Delta > 0$, alors le polynome f admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \; et \; x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et sa forme factorisée est $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

3) i) Lorsque l'équation f(x)=0 admet deux racines $x_1$et x_2; alors leur somme est S=x_1+$x_2 = -\frac{b}{a}$ et leur produit est P=$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$.

ii) $x_1$etx_2 sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

REMARQUE:

- Si $a + b + c = 0$, alors 1 est une racine de f et l'autre racine est $\frac{c}{a}$.
- Si $a - b + c = 0$, alors -1 est une racine de f et l'autre racine est $-\frac{c}{a}$.

EXEMPLE 1:

Pour chacun des polynômes ci-dessous, calculer les racines et donner sa forme factoriser.

$A(x) = x^2 - 5x + 6$

$B(x) = 4x^2 - x + 2$

$C(x) = 25x^2 + 20x + 4$

$A(x) = -3x^2 + 12x - 8$.

EXEMPLE 2 :

Déterminer s'ils existent deux réels x et y tels que :

a) $x + y = 2$ et $xy = -2$

b) $x + y = -2$ et $xy = 1$

c) $x + y = 5$ et $xy = 7$

d) $xy = 6$ et $x - y = 2\sqrt{2}$

EXEMPLE 3 :

En faisant un changement de variable, résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$

2) $4x^4 + 5x^2 + 1 = 0$

3) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

RÉSOLUTION :

1) Posons$X = x^2$, on a : $x^4 + 2x^2 - 3 = 0 \leftrightarrow X^2 + 2X - 3 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16 \quad et\ \sqrt{\Delta} = 4$

$X_1 = \frac{-2-4}{2(1)} = -3 \quad et \quad X_2 = \frac{-2+4}{2(1)} = 1$

$x^2 = -3 \ \ impossible\ ou$

$x^2 = 1 \leftrightarrow x = 1\ ou\ x = -1$

$S_{IR} = \{1\ ;\ -1\}$.

3) Posons $X = \sqrt{x}\ avec\ x > 0$, on a : $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0 \leftrightarrow X^2 - 5X + 6 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1 \quad et\ \sqrt{\Delta} = 1$

$X_1 = \frac{5-1}{2(1)} = 2 \quad et \quad X_2 = \frac{5+1}{2(1)} = 3$

$\sqrt{x} = 2 \leftrightarrow x = 4$ ou $\sqrt{x} = 3 \leftrightarrow x = 9$

$S_{IR} = \{4\ ;\ 9\}$.

EXEMPLE 4 :

Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 - x^2 + x - 2$.

1) Montrer que 1 est une racine de P.

2)a) Déterminer les réels a, b et c tels que $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.

b) Résoudre $P(x) = 0$.

RÉSOLUTION :

1) $P(1) = 2(1)^3 - 1^2 + 1 - 2 = 2 - 1 + 1 - 2 = 0.$

2)
$$\begin{array}{l|l} 2x^3 - x^2 + x - 2 & x-1 \\ \underline{-2x^3 + 2x^2} & \overline{2x^2 + x + 2} \\ \quad x^2 + x & \\ \quad \underline{-x^2 + x} & \\ \qquad 2x - 2 & \\ \qquad \underline{-2x + 2} & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

$a = 2\,;\ b = 1\ et\ c = 2$

3) $P(x) = 0 \leftrightarrow (x - 1)(2x^2 + x + 2) = 0$

$\leftrightarrow (x - 1) = 0\ \ ou\ \ 2x^2 + x + 2 = 0$

$\leftrightarrow x = 1\ \ ou\ \ \Delta = 1^2 - 4(2)(2) = -15$

$S_{IR} = \{1\}.$

APPLICATION : Résoudre la situation problème

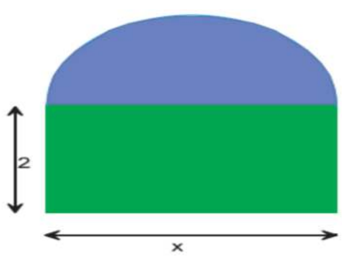
COMPETENCES A ACQUERIR PAR LES ELEVES : Résoudre tout problème pouvant se ramener à une inéquation du second degré.

PRE-REQUIS :

Résoudre dans IR : a) $3x + 2 > 0$ b) $2x + 5 \leq 5x - 3$ c) $(x + 2)(1 - 2x) \geq 0$

SITUATION PROBLEME :

NOUBI voudrait construire une porte métallique comme l'indique la figure ci-contre. Il aimerait trouver les valeurs de x pour lesquelles l'aire du rectangle sera plus grande que l'aire du demi disque.



1) SIGNE D'UN POLYNOME DU SECOND DEGRE

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

1) a) Factoriser si possible des polynômes suivants :

$A(x) = 4x^2 - 12x + 9$; $B(x) = 2x - \frac{\pi x^2}{2}$; $C(x) = -2x^2 + x + 1$

b) A l'aide d'un tableau de signe ; déterminer le signe de chacun des polynômes ci-dessus.

c) En déduire le signe de $ax^2 + bx + c \ avec \ a \neq 0$.

2) a) Rappelle les formules de calcul de l'aire d'un disque et d'un rectangle.

b) Exprimer en fonction de x, l'aire $R(x)$ du rectangle et l'aire $D(x)$ du demi disque.

c) Exprimer en fonction de x, $H(x) = R(x) - D(x)$.

d) Résoudre dans IR, $H(x) \geq 0$.

RESOLUTION :

1) a) $A(x) = 4x^2 - 12x + 9$ $\Delta = (-12)^2 - 4(4)(9) = 0$ $et \ x_0 = \frac{12}{2\times 4} = \frac{3}{2}$ d'où $A(x) = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$.

$B(x) = 2x - \frac{\pi x^2}{2}$ $\Delta = (2)^2 - 4\left(-\frac{\pi}{2}\right)(0) = 4$; $x_1 = \frac{-2-2}{2\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{4}{\pi}$ $et \ x_2 = \frac{-2+2}{2\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = 0$

D'où $B(x) = -1(x)\left(x - \frac{4}{\pi}\right)$.

$C(x) = -2x^2 + x - 1$ $\Delta = (1)^2 - 4(-2)(-1) = -7$, on ne peut factoriser.

b)

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
4	$+$		$+$
$(x-\frac{3}{2})^2$	$+$	0	$+$
$A(x)$	$+$	0	$+$

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{\pi}$		$+\infty$
-1		$-$		$-$		$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-\frac{4}{\pi}$		$-$		$-$	0	$+$	
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$	$+\infty$
$C(x)$	$-$	

c) Si $\Delta < 0$ alors

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax2+bx+c$	$signe \quad de \quad a$	

Si $\Delta = 0$ alors

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
a	$signe\ de\ a$		$signe\ de\ a$
$(x-x_0)^2$	$+$		$+$
$f(x)$	$signe\ de\ a$		$signe\ de\ a$

Si $\Delta > 0$ alors

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
a	$signe\ de\ a$		$signe\ de\ a$		$signe\ de\ a$
$(x-x_1)$	$-$		$+$		$+$
$(x-x_2)$	$-$		$-$		$+$
$f(x)$	$signe\ de\ a$		$signe\ contrairede\ a$		$signe\ de\ a$

2) a) L'aire d'un disque est πr^2 et celui d'un rectangle est $L \times l$.

b) $R(x) = 2x \quad et \quad D(x) = \frac{\pi x^2}{2}$

c) $H(x) = 2x - \frac{\pi x^2}{2}$

d) D'après la question 1 b) , $S_{IR} = \left[0\,;\,\frac{4}{\pi}\right]$.

RESUME:

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du 2nd degré.

	Racines de $f(x) = 0$	Factorisation de $f(x)$	Signe de $f(x)$
$\Delta < 0$	L'équation n'a pas de racines	On ne peut pas factoriser $f(x)$	Pour tout réel x, $f(x)$est du signe de a
$\Delta = 0$	L'équation a une seule racine $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	$f(x) = a(x - x_0)^2$	Pour tout réel $x \neq x_0$, $f(x)$ est du signe de a.
$\Delta > 0$	L'équation a deus racines distinctes $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$f(x)$est du signe de a à l'extérieur des racines, $f(x)$ est du signe de $(-a)$ entre les racines

EXEMPLE : Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

a) $x^2 + x + 1 \geq 0$ b) $-x^2 + 5x - 6 < 0$

c) $121x^2 - 88x + 16 > 0$ d) $3x^2 - 6x\sqrt{2} + 2 \leq 0$.

EXERCICE D'APPLICATION :

Soit le polynôme $P(x) = -x^3 + 7x + 6$.

1) Calculer $P(-1)$ et conclure.

2) Déterminer les réels a, b et c tels que $P(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + 1)$.

3) Résoudre dans IR :

a) $P(x) = 0$

b) $P(x) \leq 0$

APPLICATION :

Résoudre la situation de vie

2) EQUATIONS ET INEQUATIONS IRRATIONNELLES

PROPRIÉTÉS

Soit a et b des nombres réels.

1) $\sqrt{a} = b$ *équivaut à* $\begin{matrix} b \geq 0 \\ a = b^2 \end{matrix}$

2) $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ *équivaut à* $\begin{matrix} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ a = b \end{matrix}$

3) $\sqrt{a} < b$ *équivaut à* $\begin{matrix} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ a < b^2 \end{matrix}$

4) $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ *équivaut* à $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ a < b \end{cases}$

EXEMPLE : Résoudre dans IR les équations et inéquations ci-dessous.

1) $\sqrt{2-x} = x + 10$

2) $\sqrt{x-1}3 - x$

3) $\sqrt{2-x} > x + 10$

4) $\sqrt{2x+1} \geq \sqrt{x-2}$

RÉSOLUTION :

1) $\sqrt{2-x} = x + 10 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 10 \geq 0 \\ 2 - x = (x+10)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -10 \\ x^2 + 21x + 98 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -10 \\ (x+7)(x+14) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -10 \\ x = -7 \ \ ou \ x = -14 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = -7$

2) $\sqrt{x-1} \leq 3 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \\ x - 1 \leq (3-x)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 3 \\ x - 1 \leq 9 - 6x + x^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 3 \\ x^2 - 7x + 10 \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 3 \\ (x-2)(x-5) \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 3 \\ x \in]-\infty\,; 2] \cup [5\,; +\infty[\end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in [1\,; 2]$

CHAPITRE : SYSTÈME LINEAIRES DANS $\mathbb{R}^2$ ET $\mathbb{R}^3$

MOTIVATION : Dans plusieurs domaines de la vie, le but de certains problèmes est de déterminer une ou plusieurs quantités, soumises à certaines conditions. Très souvent, ces conditions se traduisent par des systèmes linéaires à plusieurs inconnues réels.

LECON 1 : SYSTEMES LINEAIRES DANS IR² — *durée : 50 Minutes*

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES : Résoudre tout problème pouvant se ramener à un système d'équations à deux ou trois inconnus.

PRE-REQUIS :

Résoudre, en précisant la méthode utilisée, chacun des systèmes ci-dessous :

1) $\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x + 2y = -5 \\ 5x + 8y = 1 \end{cases}$

SITUATION PROBLEME :

Monsieur BANGOUP dispose dans son enclos uniquement des poules et des chèvres. Il aimerait faire vacciner ses animaux par un vétérinaire mais ne connaît pas le nombre d'animaux de chaque espèce. Néanmoins, il se souvient que son fils PAUL lui avait dit qu'il y a un total de 25 têtes et 80 pattes. Aide-le à trouver le nombre de poules et de chèvres dans son enclos.

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

1) Combien de têtes et de pattes compte une poule ? Qu'en est-il pour une chèvre ?

2) Résoudre le système (S) : $\begin{cases} x + y = 25 \\ x + 2y = 40 \end{cases}$.

3) a) Sachant que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$, calculer $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; $\Delta_x = \begin{vmatrix} 25 & 1 \\ 40 & 2 \end{vmatrix}$ et $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 25 \\ 1 & 40 \end{vmatrix}$.

b) Vérifier que $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ et $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ sont des solutions du système (S).

RESOLUTION

1) Une poule a une tête et 2 pattes tandis qu'une chèvre a une tête et 4 pattes.

2) : $\begin{cases} x + y = 25 \\ x + 2y = 40 \end{cases}$

$y = 15$

$x = 25 - y = 25 - 15 = 10$

3) a) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 1 \times 1 = 1$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 25 & 1 \\ 40 & 2 \end{vmatrix} = 25 \times 2 - 40 \times 1 = 10$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 25 \\ 1 & 40 \end{vmatrix} = 1 \times 40 - 25 \times 1 = 15$

b) $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{10}{1} = 10$ et $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{15}{1} = 15.$

RESUME :

1) On appelle système d'équations linéaires dans IR², tout système qui peut s'écrire sous la forme (S) :
$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où a, b, c, a', b' et c' sont des réels.

2) Hors mis les méthodes de substitution et de combinaison, nous utiliserons la méthode des déterminants ou méthode de Cramer pour résoudre de tels systèmes. Pour cela, on procède comme suit :

a) Calcul du déterminant du système $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b.$

b) Calcul du déterminant partiel lié à x : $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b.$

c) Calcul du déterminant partiel lié à y : $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c.$

- Si $\Delta \neq 0 \,; \Delta_x \neq 0 \; et \; \Delta \neq 0$, alors le système admet une unique solution $S = \{(x; y)\}$ où $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ $et \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$.
- Si $\Delta = 0 \; et \; (\Delta \neq 0 \; ou \; \Delta_y \neq 0)$, alors le système n'admet pas de solution et donc $S = \emptyset$.
- Si $\Delta = 0 \,; \Delta_x = 0 \; et \; \Delta_y = 0$, alors le système admet une infinité de solutions et donc $S = \{(x; y) \; où \; ax + by = c\}$.

EXERCICE D'APPLICATION

Résoudre les systèmes ci-dessous en utilisant la méthode de Cramer.

1) $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ -6x + 2y = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 4y = -2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 6x - 4y = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 7 \\ 2x^2 + y^2 = -4 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ -2x + y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$

APPLICATION ;

Résoudre la situation de vie

LECON 2 : SYSTEMES LINEAIRE DANS IR³ **Durée : 50 Minutes**

COMPETENCES A ACQUERIR PAR LES ELEVES : Résoudre tout problème pouvant se ramener à un système d'équations à trois inconnus.

SITUATION PROBLEME :

Une usine fabrique chaque jour trois alliages à base de fer, de plomb et de cuivre. L'alliage A est constitué de 30% de fer, 30% de plomb et 40% de cuivre. L'alliage B contient 10% de fer, 50% de plomb et 40% de cuivre. L'alliage C est formé de 50% de fer, 25% de plomb et 25% de cuivre. L'usine dispose de 37 Kg de fer, 35 Kg de plomb et 38 Kg de cuivre.
Quelle quantité de chacun des alliages doit-elle produire pour épuiser son stock.

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

Soit le système (S) : $\begin{cases} 3x + y + 5z = 370 & (L_1) \\ 3x + 5y + 2{,}5z = 350 & (L_2) \\ 4x + 4y + 2{,}5z = 380 & (L_3) \end{cases}$

1)a) En effectuant une combinaison linéaire entre $(L_1)\ et (L_2)$, éliminer x . On nommera cette nouvelle équation (L'_2).

b) En effectuant une combinaison linéaire entre $(L_1)\ et (L_3)$, éliminer x . On nommera cette nouvelle équation (L'_3).

c) Ecrire le système formé par les équations (L_1) ; (L'_2) et (L'_3).

2) a) En effectuant une combinaison linéaire entre $(L'_2)\ et\ (L'_3)$, éliminer y . On nommera cette nouvelle équation L''_3.

b) Ecrire le système formé par les équations (L_1) ; $(L'_2)\ et\ (L''_3)$.

3) En déduire la solution du système (S).

RESOLUTION

1) a) $\begin{array}{c} 1 \\ (-1) \end{array} \begin{cases} 3x + y + 5z = 370 \\ 3x + 5y + 2{,}5z = 350 \end{cases}$

$-4y + 2{,}5z = 20 \qquad (L'_2)$

$-8y + 12{,}5z = 1240 \qquad (L'_3)$

b) $\begin{array}{c} 4 \\ (-3) \end{array} \begin{cases} 3x + y + 5z = 370 \\ 4x + 4y + 2{,}5z = 380 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + z = 600 & (L_1) \\ -4y + 2{,}5z = 20 & (L'_2) \\ -8y + 12{,}5z = 1240 & (L'_3) \end{cases}$

2) a) $\begin{array}{c} (-2) \\ 1 \end{array} \begin{cases} -4y + 2{,}5z = 20 \\ -8y + 12{,}5z = 1240 \end{cases}$

$7{,}5z = 1200 \qquad (L''_3)$

b) $\begin{cases} x + 2y + z = 600 & (L_1) \\ -4y + 2{,}5z = 20 & (L'_2) \\ 7{,}5z = 1200 & (L''_3) \end{cases}$

3) $z = \frac{1200}{7{,}5} = 160$ $\quad y = \frac{20-(2{,}5\times160)}{-4} = 95$ $\quad x = 600 - (2 \times 95) - 160 = 250$

RESUME :

1) On appelle système de 3 équations à trois inconnues tout système de la forme

$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$ où a, b, c, a’ ; b’, c’, a’’, b’’ et c’’ sont des réels.

2) Pour résoudre de tels systèmes, nous utiliserons soit la méthode par substitution, soit la méthode du pivot de Gauss. Cette dernière méthode consiste à effectuer des combinaisons linéaires entre les équations ou lignes jusqu’à l’obtention d’un système triangulaire

EXERCICE D’APPLICATION

Résoudre les systèmes ci-dessous :

1) $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 6 \\ x + 3y - 4z = 0 \\ -2x + 3y + z = 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x - 3y + 4z = 2 \\ 5x + 4z = 3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ -x + y + 2z = 2 \end{cases}$

APPLICATION ;

Résoudre la situation de vie

CHAPITRE: TRIGONOMETRIE

MOTIVATION :

De nombreuses situations de vies telles que la détermination des dimensions d'un terrain, l'achat ou la vente des biens de consommations, les positions d'objets mouvants … font appels à la notion de trigonométrie. Ce cours nous donnera des outils nécessaires à la résolution de ces problèmes

LECON 1: FORMULES TRIGONOMETRIQUES DUREE : 100 Minutes

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES:

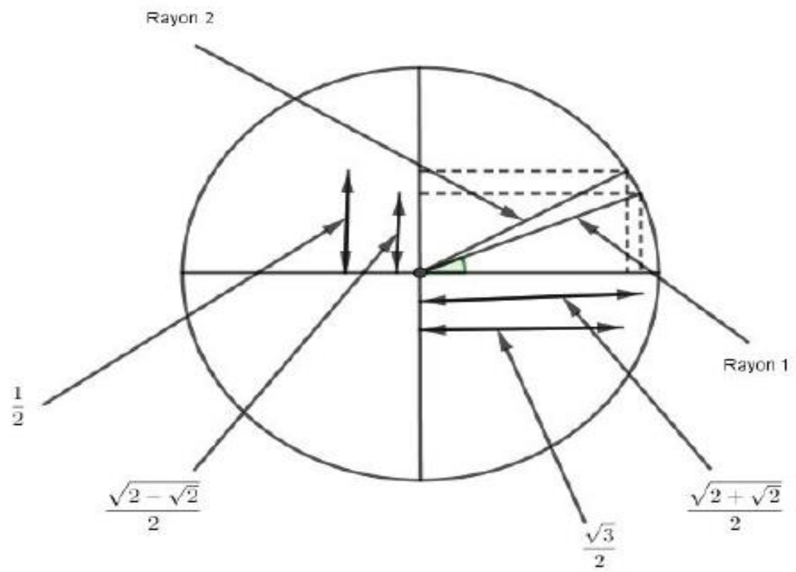
- Déterminer les lignes trigonométriques des angles orientés.
- Reconnaitre et utiliser les formules trigonométriques

PRE-REQUIS :

- Angles orientés et mesure principale
- Cercle Trigonométrique
- Produit scalaire
- Norme d'un vecteur
- Cosinus, Sinus et Tangentes de quelques angles particuliers.

SITUATION PROBLEME :

Monsieur Adam est un jeune cultivateur. Il veut réparer les rayons des roues de son porte-tout (communément appelé ''pousse-pousse'') chez son mécanicien Kouam. Le mécanicien lui conseille qu'afin d'éviter les pertes de rayons en cas de surcharge, il devrait placer les rayons des roues de telle sorte que l'angle entre deux rayons consécutifs soit compris entre 5° et 10° c'est-à-dire l'angle appartient à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{36};\frac{\pi}{18}\right]$. La figure ci-dessous présente les rayons placés par le mécanicien. Les roues de monsieur Adam peuvent-elles supporter la surcharge



ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

ACTIVITÉ 1 :

Soit (C) le cercle trigonométrique représenté dans un repère orthonormé (O,I J) ; A le point image sur (C) de l'angle orienté α. B, C et D les points symétriques de A respectivement par rapport à (OJ), (OI) et O.

1- Placer les points A, B, C et D sur (C) et déterminer l'angle orienté associé à chacun des points B, C et D.

On a $B(\pi-\alpha)$; $C(-\alpha)$ et $D(\pi+\alpha)$

2- Déterminer de deux façons différentes les coordonnées des points B, C et D dans le repère (O, I, J).

► **On a : comme $B(\pi-\alpha)$ alors $B\begin{pmatrix}\cos(\pi-\alpha)\\ \sin(\pi-\alpha)\end{pmatrix}$; $C(-\alpha)$ alors $C\begin{pmatrix}\cos(-\alpha)\\ \sin(-\alpha)\end{pmatrix}$ et $D(\pi+\alpha)$ alors$D\begin{pmatrix}\cos(\pi+\alpha)\\ \sin(\pi+\alpha)\end{pmatrix}$.**

► **Par lecture sur le cercle trigonométrique on a : $B\begin{pmatrix}-\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ -\sin(\alpha)\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}-\cos(\alpha)\\ -\sin(\alpha)\end{pmatrix}$**

3- En déduire une formule permettant de calculer les lignes trigonométriques des angles orientés associés $(\pi-\alpha)$; $(-\alpha)$ et $(\pi+\alpha)$

Par unicité des coordonnées d'un point, on a : $\begin{cases}\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha\\ \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha\end{cases}$; et $\begin{cases}\cos(-\alpha)=\cos\alpha\\ \sin(-\alpha)=-\sin\alpha\end{cases}$ et $\begin{cases}\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha\\ \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\end{cases}$.

ACTIVITÉ 2 :

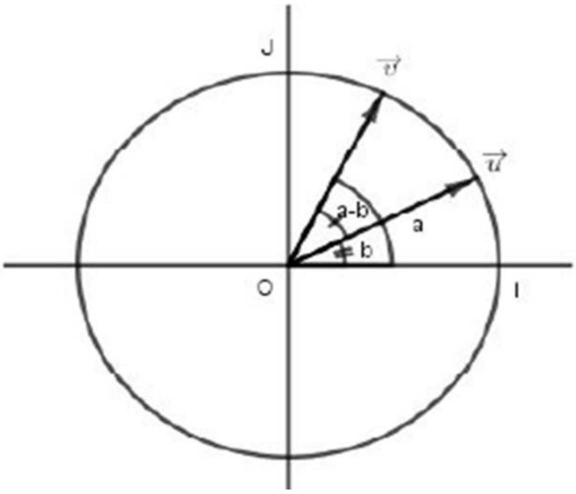
Soit (C) le cercle trigonométrique, a et b deux nombres réels, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires tels que $b=mes(\vec{\imath},\vec{u})$ et $a=mes(\vec{\imath},\vec{v})$.

1- a) Justifions que $(\vec{u},\vec{v})=(\vec{\imath},\vec{v})-(\vec{\imath},\vec{u})$.

On a : $(\vec{u},\vec{v})=(\vec{u},\vec{\imath})+(\vec{\imath},\vec{v})=-(\vec{\imath},\vec{u})+(\vec{\imath},\vec{v})=(\vec{\imath},\vec{v})-(\vec{\imath},\vec{u})$. .

b) En déduire $mes(\vec{u},\vec{v})$.

On a : $mes(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=mes(\widehat{\vec{\imath},\vec{v}})-mes(\widehat{\vec{\imath},\vec{u}})=a-b$



2- a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

Comme nous sommes dans le cercle trigonométrique, on a : $\vec{u}(\cos b;\sin b)$ et $\vec{v}(\cos a;\sin a)$.

b) Calculons de deux façons différentes $\vec{u}.\vec{v}$.

► **$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=1\times1\times\cos(a-b)$**

d'où $\vec{u}.\vec{v}=\cos(a-b)$

► **$\vec{u}.\vec{v}=\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}=\cos a\cos b+\sin a\sin b.$**

c) Déduisons une formule permettant de calculer $\cos(a-b)$.

Comme $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v}$ alors on a : $\cos(a-b) = cosacosb + sinasinb$.

d) En remarquant que a + b = a − (−b), donner une formule permettant de calculer $cos(a+b)$.

On a : $\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = cosacos(-b) + sinasin(-b) = cosacosb - sinasinb$.

Considérons la roue comme étant le cercle trigonométrique, α l'angle formé par les deux rayons consécutifs 1 et 2. a et b les angles formés respectivement par les rayon 1 et 2 avec l'axe horizontal (l'axe des abscisses) ; alors on : $\alpha = a - b$

Ainsi $cos\ \alpha = \cos(a-b) = cosacosb + sinasinb = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = 0{,}991444 \ldots$ on obtient alors $\alpha = 7{,}5° = \frac{\pi}{24}$. Les roues de M. Adam peuvent supporter la surcharge car l'angle entre deux rayons consécutifs est $\frac{\pi}{24} \in \left[\frac{\pi}{36}; \frac{\pi}{18}\right]$.

RESUME :

1- LIGNES TRIGONOMETRIQUES D'ANGLES ORIENTES ASSOCIES.

Soit α un angle orienté. Les angles orientés $-\alpha$, $\pi-\alpha$, $\pi+\alpha$, $\frac{\pi}{2}-\alpha$ et $\frac{\pi}{2}+\alpha$ sont dit associés à α et on a les formules suivantes :

♠ $\begin{cases} \boldsymbol{cos(-\alpha) = cos\alpha} \\ \boldsymbol{sin(-\alpha) = -sin\alpha} \\ \boldsymbol{tan(-\alpha) = -tan\alpha} \end{cases}$;

♠ $\begin{cases} \boldsymbol{cos(\pi-\alpha) = -cos\alpha} \\ \boldsymbol{sin(\pi-\alpha) = sin\alpha} \\ \boldsymbol{tan(\pi-\alpha) = -tan\alpha} \end{cases}$;

♠ $\begin{cases} \boldsymbol{cos(\pi+\alpha) = -cos\alpha} \\ \boldsymbol{sin(\pi+\alpha) = -sin\alpha} \\ \boldsymbol{tan(\pi+\alpha) = tan\alpha} \end{cases}$

♠ $\begin{cases} \boldsymbol{cos}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \boldsymbol{sin\alpha} \\ \boldsymbol{sin}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \boldsymbol{cos\alpha} \\ \boldsymbol{tan}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \boldsymbol{cotan\alpha} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{tan\alpha}} \end{cases}$;

♠ $\begin{cases} \boldsymbol{cos}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \boldsymbol{-sin\alpha} \\ \boldsymbol{sin}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \boldsymbol{cos\alpha} \\ \boldsymbol{tan}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \boldsymbol{-cotan\alpha} = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{tan\alpha}} \end{cases}$.

EXEMPLE :

Ecris plus simplement $A(x) = cos(\pi + x) + cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + sin(\pi - x) + cos(-x)$

PROPRIÉTÉS : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$; on a

P1) $cos^2x + sin^2x = 1$

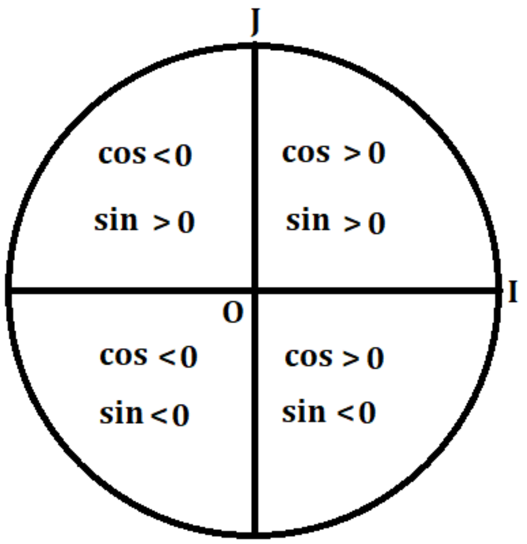
P2) $\cos(x + 2k\pi) = cosx$; $\sin(x + 2k\pi) = sinx$ et $\tan(x + 2k\pi) = tanx$ (avec $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$)

P3) $1 + tan^2x = \frac{1}{cos^2x}$; $1 + cotan^2x = \frac{1}{sin^2x}$

REMARQUES :

Signe de cosinus et sinus par cadran sur le cercle trigonométrique.

- Pour $\in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\begin{cases} \boldsymbol{cos\alpha > 0} \\ \boldsymbol{sin\alpha > 0} \end{cases}$
- Pour $\in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$, $\begin{cases} \boldsymbol{cos\alpha < 0} \\ \boldsymbol{sin\alpha > 0} \end{cases}$
- Pour $\in \left]-\pi; -\frac{\pi}{2}\right[$, $\begin{cases} \boldsymbol{cos\alpha < 0} \\ \boldsymbol{sin\alpha < 0} \end{cases}$
- Pour $\in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$, $\begin{cases} \boldsymbol{cos\alpha > 0} \\ \boldsymbol{sin\alpha < 0} \end{cases}$

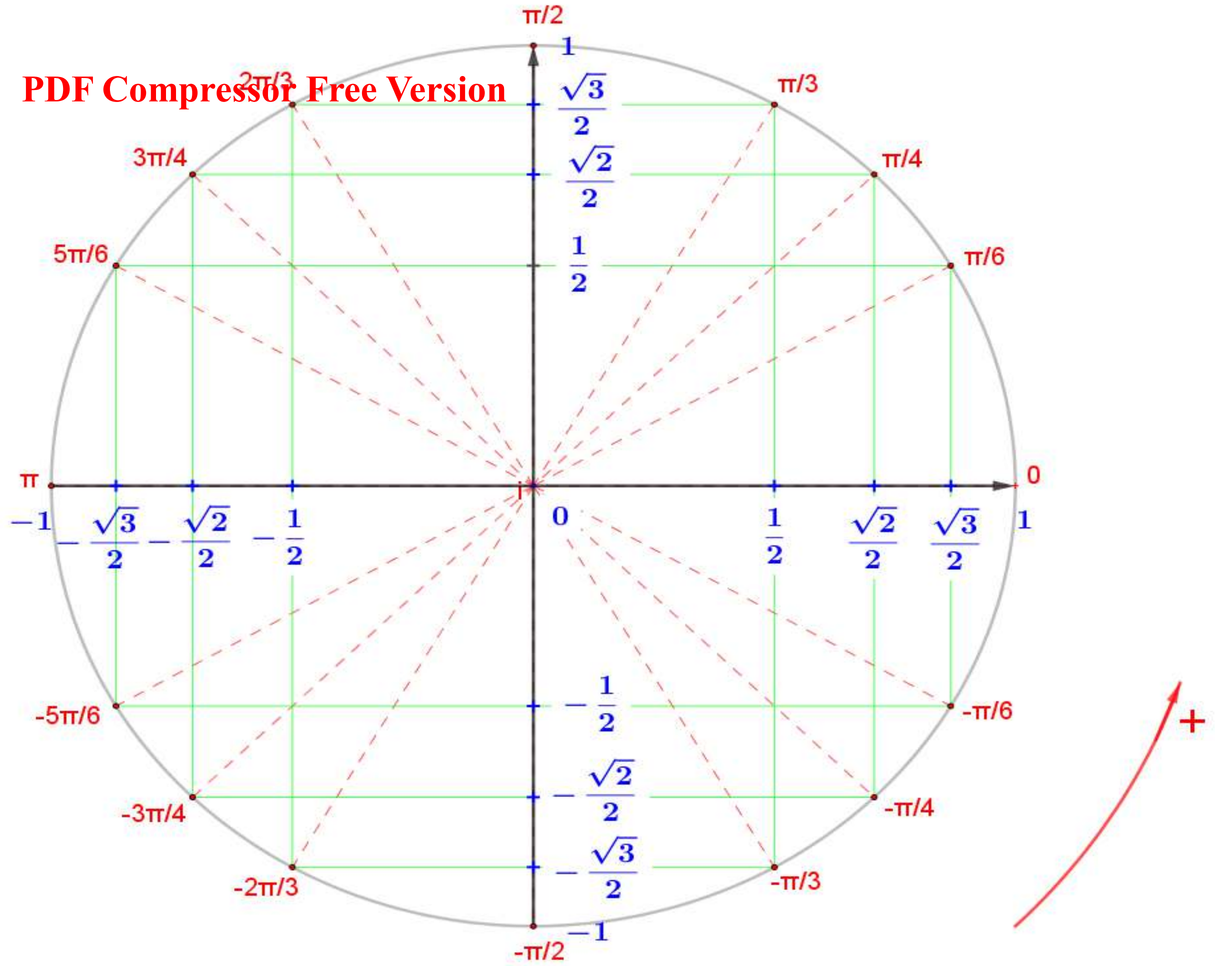


EXEMPLE :

- Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $tanx = \frac{3}{4}$. Déterminer $cosx$ puis $sinx$.

- Ecrire simplement $B(x) = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + cos(5\pi - x) + sin(4\pi - x) + cos(x + 8\pi)$

2- LIGNES TRIGONOMETRIQUES D'ANGLE REMARQUABLES



Mesure en degré	0°	30 °	45 °	60 °	90 °	120 °	135 °	150 °	180
Mesure en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

3- FORMULES TRIGONOMETRIQUES.

a) FORMULES D'ADDITIONS.

Soit a et b deux nombres réels.

A_1) $\cos(a-b) = cosacosb + sinasinb$

A_2) $\cos(a+b) = cosacosb - sinasinb$

A$_3$) $\sin(a-b) = sinacosb - sinbcosa$

A$_4$) $\sin(a+b) = sinacosb + sinbcosa$

A$_5$) $\tan(a-b) = \frac{tana - tanb}{1 + tana \times tanb}$

A$_6$) $\tan(a+b) = \frac{tana + tanb}{1 - tana \times tanb}$

NB :

La démonstration de A$_3$) et A$_4$) s'obtiennent respectivement par les relations :

$$\sin(a-b) = cos\left[\frac{\pi}{2} - (a-b)\right] = cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right] \text{ et } sin(a+b) = \sin[a-(-b)].$$

Exemple : - Sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, donner la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{7\pi}{12})$.

- Exprimer $\cos(\frac{\pi}{3} - \alpha)$ et $\sin(\frac{\pi}{3} - \alpha)$ en fonction de $cos\alpha$ et $sin\alpha$

b) FORMULES DE DUPLICATION.

En posant $a = b = x$ dans A2), A4) et A6), on obtient respectivement :

D1) $\cos(2x) = \cos(x+x) = cosxcosx - sinxsinx = cos^2x - sin^2x$ d'où $\boldsymbol{\cos(2x) = cos^2x - sin^2x}$ D2) $\sin(2x) = \sin(x+x) = sinxcosx + sinxcosx = 2sinxcosx$ d'où $\boldsymbol{\sin(2x) = 2sinxcosx}$ D3) $\tan(2x) = \tan(x+x) = \frac{tanx + tanx}{1 - tanx \times tanx} = \frac{2tanx}{1 - tan^2x}$ d'où $\boldsymbol{\tan(2x) = \frac{2tanx}{1 - tan^2x}}$

c) FORMULES DE LINEARISATION.

D'après D1), on a $\cos(2x) = cos^2x - sin^2x = 1 - sin^2x - sin^2x = 1 - 2sin^2x$

Ainsi on obtient : L1) $sin^2x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

De même on a : L2) $cos^2x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$

Exemple : A l'aide des formule de linéarisation, donner la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.

d) FORMULES DE TRANSFORMATIONS.

A l'aide des formules d'additions, on a : $\begin{cases} \cos(a-b) = cosacosb + sinasinb & (1) \\ \cos(a+b) = cosacosb - sinasinb & (2) \end{cases}$

- (1)+(2) donne : $cosacosb = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$
- (1)-(2) donne : $sinasinb = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

De même on a : $\begin{cases} \sin(a+b) = sinacosb + sinbcosa & (3) \\ \sin(a-b) = sinacosb - sinbcosa & (4) \end{cases}$

- (3)+(4) donne : $sinacosb = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$.

EXERCICES D'APPLICATIONS

1- On pose $A(x) = 2\sin\frac{\pi}{7}(cos\frac{\pi}{7} + cos\frac{3\pi}{7} + cos\frac{5\pi}{7})$

a) Montrer que $A(x) = \sin\frac{6\pi}{7} = sin\frac{\pi}{7}$.

b) En déduire que $cos\frac{\pi}{7} + cos\frac{3\pi}{7} + cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$

2- Montrer que $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = cosx + sinx$

3- Exprimer $cos3x$ en fonction de $cosx$.

4- a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\sqrt{3}\,x^2 + 6x - \sqrt{3} = 0$.

b) Sachant que $\tan(2x) = \frac{2tanx}{1-tan^2x}$, montrer que $\tan\frac{\pi}{12}$ est une solution de (E).

c) En déduire la valeur exacte de $\tan\frac{\pi}{12}$.

LECON 2: EQUATIONS ET INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

DUREE : 100 Minutes

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES:

- Résoudre des équations et inéquations trigonométriques et représenter les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.
- Résoudre graphiquement des équations et inéquations trigonométriques

PRE-REQUIS :

- Pour tout réel x, on a $-1 \leq cosx \leq 1$ et $-1 \leq sinx \leq 1$.
- Si α est une mesure d'un angle orienté alors tout réel de la forme $\alpha + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ est une mesure du même angle orienté.
- Si A est le point image du réel α sur le cercle trigonométrique, alors $A(cos\alpha; sin\alpha)$
- Recopie et complète par $\in$ ou $\notin$: $\frac{2\pi}{3} \dots [-\pi;\pi]$; $\frac{5\pi}{3} \dots [0;2\pi]$; $-\frac{3\pi}{4} \dots [0;2\pi]$; $\frac{4\pi}{3} \dots [-\pi;\pi]$.
- Formule trigonométriques
- Résolution d'équation dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{2}\,x^2 + (1-\sqrt{2})x - 1 = 0$

SITUATION PROBLEME :

Pour régler ses problèmes de pertes de rayons en cas de surcharge, Adam consulte un autre mécanicien qui lui conseille de placer les rayons des roues de son porte-tout de telle sorte que l'angle a formé par deux rayons consécutifs soit l'intervalle $\left]\frac{\pi}{36};\frac{\pi}{18}\right[$ et vérifie la relation $cos2a - sin2a = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Très embarrassé, Adam ignore comment procéder. Aide Adam à déterminer l'angle entre deux rayons consécutifs de son porte-tout.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

ACTIVITÉ 1.

1. Donner une condition suffisante sur a pour laquelle les équations $cosx = a$ et $sinx = a$ admettent au moins une solution : **Solution : $\boldsymbol{a \in [-1;1]}$.**
2. - Déterminer un réel x tel que $cosx = \frac{\sqrt{2}}{2}$: **On a $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{4}}$ car $\boldsymbol{cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$**

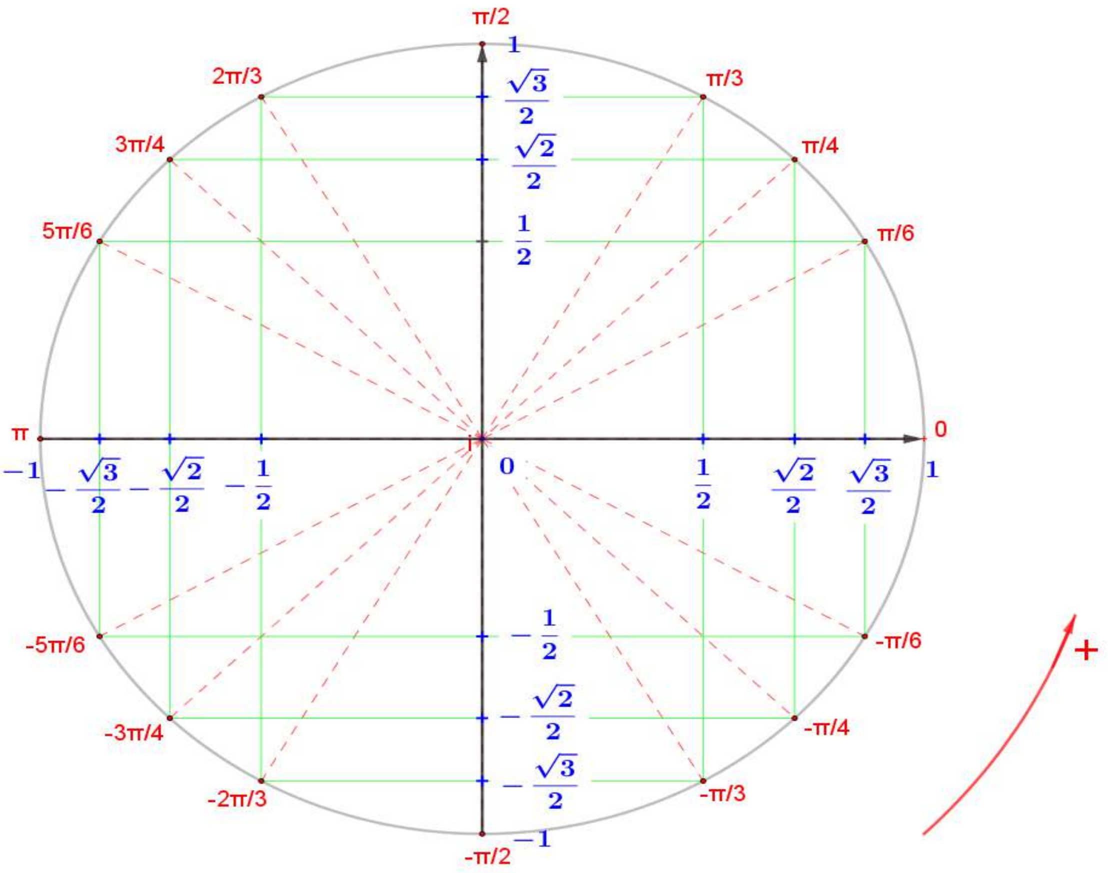
   - Déterminer un réel x tel que $sinx = \frac{1}{2}$: **On a $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{6}}$ car $\boldsymbol{sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}}$**

3. On considère les équations ; $cosx = \frac{1}{2}$; $sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $tanx = \sqrt{3}$

a) Sur un cercle trigonométrique, trace les droites ;
(D') : $x = \frac{1}{2}$; (D): $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $(D1)$: $y = \sqrt{3}$ puis (T) la tangente au cercle en I.

(D)

b) En parcourant le cercle de $-\pi$ à π, donne les angles correspondants aux points de rencontre de chacune des droites $(D),(D')$ et (D'') avec le cercle où (D'') est la droite passant par O et concourantes à $(D1)$ et (T).



SOLUTION :

(D'))

- La droite (D) rencontre le cercle en $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$

- La droite (D') rencontre le cercle en $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$

- La droite (D'') rencontre le cercle en $-\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$

NB : Ces valeurs sont dans chaque cas les <u>solutions</u> dans $[-\pi; \pi]$ de l'équation correspondante.

c) En déduire la forme générale des réels x solutions des équations $cosx = \frac{1}{2}$; $sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $tanx = \sqrt{3}$.

SOLUTION :

- Comme $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ vérifient l'équation $cosx = \frac{1}{2}$ alors la forme générale des solutions de cette équation est : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad ou\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

- Comme $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$ vérifient l'équation $sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ alors la forme générale des solutions de cette équation est : $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

- Comme $-\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ vérifient l'équation $tanx = \sqrt{3}$ alors la forme générale des solutions de cette équation est : $x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

ACTIVITÉ 2.

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E); cos2x - sin2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. Montrer que $cos2x - sin2x = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}cos2x - \frac{\sqrt{2}}{2}sin2x)$.

SOLUTION :

On a $\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}cos2x - \frac{\sqrt{2}}{2}sin2x) \; = (\frac{2}{2}cos2x - \frac{2}{2}sin2x) \; = cos2x - sin2x$

2. Déterminer $\theta \in]-\pi; \pi]$ tel que : $cos2x - sin2x = \sqrt{2}(cos\theta cos2x - sin\theta sin2x)$ puis $\alpha \in]-\pi; \pi]$ tel que $cos2x - sin2x = \sqrt{2}(sin\alpha cos2x - cos\alpha sin2x)$

SOLUTION :

- $cos2x - sin2x = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}cos2x - \frac{\sqrt{2}}{2}sin2x) = 2\left(cos\frac{\pi}{4}cos2x - sin\frac{\pi}{4}sin2x\right)$;

car $cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- $cos2x - sin2x = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}cos2x - \frac{\sqrt{2}}{2}sin2x) = 2\left(sin\frac{\pi}{4}cos2x - cos\frac{\pi}{4}sin2x\right)$;

car $sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Déduire que l'équation (E) est équivalent à : $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ (*) ou à : $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \frac{1}{2}$ (**)

SOLUTION :

- $(E); cos2x - sin2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}cos2x - \frac{\sqrt{2}}{2}sin2x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4}cos2x - sin\frac{\pi}{4}sin2x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

- $(E); cos2x - sin2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}cos2x - \frac{\sqrt{2}}{2}sin2x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(sin\frac{\pi}{6}cos2x - cos\frac{\pi}{6}sin2x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=\frac{1}{2}.$$

4. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E).

SOLUTION :

D'après ce qui précède, résoudre (E) revient à résoudre l'une des équations (*) ou (**).

On a $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ ou \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ 2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{24}+k\pi \\ ou \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ x=-\frac{7\pi}{24}+k\pi \end{cases}$

l'ensemble solution de (E) est donné par : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{7\pi}{24}+k\pi;\ \frac{\pi}{24}+k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})\right\}$

Pour déterminer la valeur de l'angle entre deux rayons consécutifs, nous devons résoudre dans $\left]\frac{\pi}{36};\frac{\pi}{18}\right[$ l'équation $cos2a-sin2a=\frac{\sqrt{2}}{2}$. D'après l'***activité 2,*** nous avons $a=\frac{\pi}{24}+k\pi$ **ou** $=-\frac{7\pi}{24}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$**. Après encadrement de ces solutions dans** $\left]\frac{\pi}{36};\frac{\pi}{18}\right[$ on obtient : $a=\frac{\pi}{24}$**. Donc Adam doit placer ses rayons tels que l'angle entre deux rayons consécutifs soit de** $\frac{\pi}{24}=7,5^{o}$.

RESUME :

1- EQUATION DU TYPE $cosx=a$ $(a\in\mathbb{R})$.

Soit à résoudre l'équation $cosx=a$:

- Si $|a|>1$ c'est-dire $a\notin[-1;1]$, alors l'équation n'as pas de solution ; on note $S=\emptyset$.
- Si $|a|\leq 1$ c'est-dire $a\in[-1;1]$, alors on cherche un angle $\alpha\in]-\pi;\pi]$ tel que $cos\alpha=a$; ainsi l'équation devient ; $cosx=cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha+2k\pi \\ ou \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ x=-\alpha+2k\pi \end{cases}$

2- EQUATION DU TYPE $sinx=b$ $(b\in\mathbb{R})$.

Soit à résoudre l'équation $sinx=b$:

- Si $|b|>1$ c'est-dire $b\notin[-1;1]$, alors l'équation n'as pas de solution ; on note $S=\emptyset$.
- Si $|b|\leq 1$ c'est-dire $b\in[-1;1]$, alors on cherche un angle $\beta\in]-\pi;\pi]$ tel que $sin\beta=b$; ainsi l'équation devient ; $sinx=sin\beta \Leftrightarrow \begin{cases} x=\beta+2k\pi \\ ou \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ x=\pi-\beta+2k\pi \end{cases}$

3- EQUATION DU TYPE $tanx=c$ $(c\in\mathbb{R})$.

Soit à résoudre l'équation $tanx=c$ alors on cherche un angle $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tels que $tan\theta=c$, l'équation devient $tanx=tan\theta \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\theta+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

REMARQUE :

Quelques cas particuliers.

- $cosx = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$
- $cosx = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$; $cosx = -1 \Leftrightarrow x = (2k+1)\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$
- $sinx = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$
- $sinx = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $sinx = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

EXEMPLE :

Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ les équations suivantes.

a) $2sinx - \sqrt{3} = 0$; b) $2cos2x + 1 = 0$; c) $tanx = \sqrt{3}$; d) $2sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}$.

4- EQUATION DU TYPE $acosx + bsinx = c \quad (a \neq 0, b \neq 0, c \in \mathbb{R})$.

Pour résoudre ce type d'équation, on calcul d'abord $r = \sqrt{a^2 + b^2}$,

- Si $r < c$ alors l'équation n'admet pas de solution.
- Si $r \geq c$ alors l'équation admet au moins une solution ainsi on transforme (par factorisation) l'écriture $acosx + bsinx$ comme suit : $acosx + bsin = r(\frac{a}{r}cosx + \frac{b}{r}sinx)$,
  Ensuite on peut distinguer deux cas :

1^{ere} cas : On cherche $\alpha \in]-\pi;\pi]$ tels que $\begin{cases} cos\alpha = \frac{a}{r} \\ sin\alpha = \frac{b}{r} \end{cases}$

On obtient : $acosx + bsin = r\left(\frac{a}{r}cosx + \frac{b}{r}sinx\right)$

$$= r(cos\alpha cosx + sin\alpha sinx)$$

$$= rcos(x - \alpha) ;$$

Ainsi, résoudre $acosx + bsin = c$ reviendra à résoudre $\boldsymbol{rcos(x-\alpha) = c}$ et par ricochet à résoudre $\boldsymbol{cos(x-\alpha) = \frac{c}{r}}$.

2^{ième} cas : On cherche $\beta \in]-\pi;\pi]$ tels que $\begin{cases} sin\beta = \frac{a}{r} \\ cos\beta = \frac{b}{r} \end{cases}$

On obtient : $acosx + bsin = r\left(\frac{a}{r}cosx + \frac{b}{r}sinx\right)$

$$= r(cos\beta cosx + sin\beta sinx)$$

$$= rsin(x + \beta) ;$$

Ainsi, résoudre $acosx + bsin = c$ reviendra à résoudre $\boldsymbol{rsin(x+\beta) = c}$ et par ricochet à résoudre $\boldsymbol{sin(x+\beta) = \frac{c}{r}}$.

EXEMPLE :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3}cosx + sinx = 1$.

5- INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES.

Pour résoudre une inéquation trigonométrique, on peut :

- Résoudre l'équation trigonométrique associée à cette inéquation.
- Placer les solutions obtenues dans un tableau de signe ou placer les points images de ces solutions sur un cercle trigonométrique.
- Etudier le signe des arcs définis par ces solutions sur le cercle ou dans le tableau.
- Déduire les intervalles solutions.

EXEMPLE :

Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation $2cosx - 1 \leq 0$

6- RESOLUTION GRAPHIQUE DES EQUATIONS ET INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES.

Soit (C) le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé (O, I, J).

- Graphiquement, les solutions de l'équation $cosx = a$ sont les angles correspondant aux points de rencontre de la droite d'équation $x = a$ avec le cercle trigonométrique.
- Graphiquement, les solutions de l'équation $sinx = b$ sont les angles correspondant aux points de rencontre de la droite d'équation $y = b$ avec le cercle trigonométrique.
- Graphiquement, les solutions de l'équation $tanx = c$ sont les angles correspondant aux points de rencontre du cercle trigonométrique avec la droite passant par l'origine $O(0\,;0)$ et le point de coordonnées $(1\,;\ c)$.

EXEMPLE:

Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes. a) $2cosx = 1$; b) $sinx \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $tanx = 1$.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

EXERCICE 1.

1- Calculer $(2\sqrt{3} - 2)^2$.
2- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4t^2 - (2\sqrt{3} + 2)t + \sqrt{3} = 0$.
3- a) Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'équation $4cos^2x - (2\sqrt{3} + 2)cosx + \sqrt{3} = 0$
b) Représenter les points images des solutions sur le cercle trigonométrique, puis en déduire la nature du polygone obtenu et calculer son aire.

4- En déduire dans $]-\pi;\pi]$ la solution de l'inéquation $-4sin^2x-\left(2\sqrt{3}+2\right)cosx+4+\sqrt{3}=0$.

EXERCICE 2.

On donne le polynôme $P(x)=3cos2x-\sqrt{3}sin2x$.

1- Déterminer les réels r et θ tels que $P(x)=rcos(2x+\theta)$.
2- Résoudre dans $[0;2\pi[$ l'équation $P(x)=-\sqrt{3}$.
3- En déduire dans $[0;2\pi[$ les solutions de l'inéquation $P(x)+\sqrt{3}>0$.

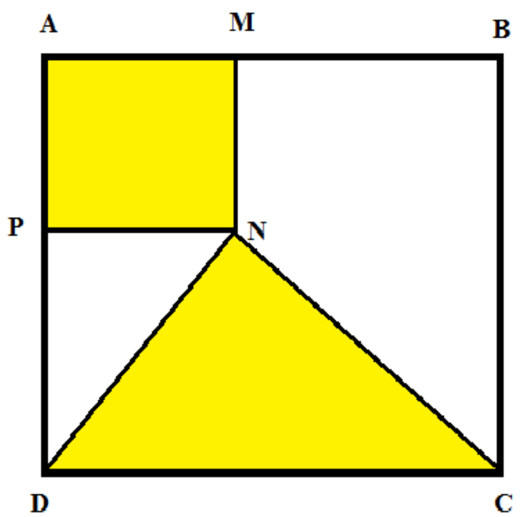
CHAPITRE : GENERALITES SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES

MOTIVATION :

Dans la vie, l'étude des fonctions numériques peut permettre :

- La détermination des dimensions d'un terrain,
- Le partage des biens,
- La vérification d'une facture,
- La comparaison des prix des objets …

SITUATION PROBLEME :



La figure ci-contre est représentation du terrain de M. NGO'O qui a la forme d'un carré de 8km de côté. Pour des raisons géographiques, il a délimité le carré AMNP, puis le triangle NDC ce qui est représenté en jaune. Il souhaite cultiver du cacao sur la partie en jaune et du café sur le reste. Il souhaite positionner le point M sur [AB] de sorte que l'aire de la partie en jaune soit la même que l'aire de la partie restante.

LECON 1: NOTIONS DE FONCTIONS ET D'APPLICATIONS

DUREE : 100 Minutes

COMPETENCES A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

A la fin de cette leçon, l'élève sera capable de :

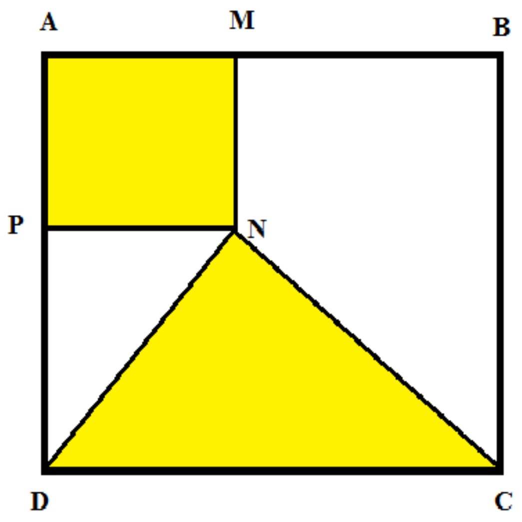
- Faire la différence entre une application et une fonction
- Reconnaitre une application injective, surjective, bijective
- Déterminer de façon explicite la réciproque d'une application bijective
- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction

PRE-REQUIS :

On donne l'expression $A(x) = x^2 - 4x + 3$

1. Donner la valeur de $A(x)$ pour $x = -5$, pour $x = -\frac{3}{2}$ et pour $x = \sqrt{3}$
2. Déterminer la valeur de x pour laquelle $A(x) = 0$, A(x) = 6.

SITUATION PROBLEME :



La figure ci-contre est représentation du terrain de M. NGO'O qui a la forme d'un carré de 8km de côté. Pour des raisons géographiques, il a délimité le carré AMNP, puis le triangle NDC ce qui est représenté en jaune. Il souhaite cultiver du cacao sur la partie en jaune et du café sur le reste. Il souhaite positionner le point M sur [AB] de sorte que l'aire de la partie en jaune soit la même que l'aire de la partie restante.

Donner lui une astuce.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

1. Considérons le problème d'entrée, et posons AM = x et appelons A(x) l'aire de la partie en jaune.
   a. Pour x = 0 ; quelle est alors l'aire A(0) ?

b. Pour $x = 2$; quelle est alors l'aire $A(2)$?

c. Pour $x = 8$; quelle est alors l'aire $A(8)$?

2. Exprimer en fonction de x l'aire du carré AMNP.
3. Exprimer en fonction de x l'aire du triangle NDC.
4. En déduire l'expression de $A(x)$ en fonction de x. Calculer $A(0)$, $A(2)$, $A(8)$.
5. Retrouve-t-on les résultats obtenus précédemment ?

RESUME :

I. GENERALITES SUR LES APPLICATIONS

1. DEFINITIONS

a. **APPLICATION :** Une application f est la donnée :

- d'un ensemble de départ A,
- d'un ensemble d'arrivée B,
- d'une relation ou d'une formule associant chaque élément x de A à un unique élément y=f(x) de B.

EXEMPLES : $f_1 : \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{matrix}$; $f_2 : \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{matrix}$ sont des applications. Par contre $f_3 : \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{matrix}$

A = l'ensemble des élèves d'une classe ayant composé en maths

B = l'ensemble des nombres compris en 0 et 20 inclus.

La relation qui à chaque élève associe sa note en maths est une application.

b. IMAGE ET ANTECEDENT

Si $f : \begin{matrix} A \to B \\ x \mapsto f(x) \end{matrix}$ est une application, alors :

- on appelle image de x par f l'élément $f(x)$.
- Si X est une partie de A, on note $f(X) = \{f(x),\ x \in X\}$ l'image de X par f.
- Si $y=f(x)$, alors on dit que x est un antécédent de y

EXEMPLE :

On a $f_1(-5) = 25$, 25 est l'image de -5 et -5 est l'antécédent de 25

2. PROPRIETES GENERALES

DÉFINITION

Soit Si $f : A \to B$ est une application, alors :

- On dit que f est injective si tout $y \in B$ possède au plus un antécédent
- On dit que f est surjective si tout $y \in B$ possède au moins un antécédent.
- On dit que f est bijective si tout $y \in B$ possède exactement un antécédent. On note alors cet élément $x = f^{-1}(y)$ et l'application $f^{-1} :$ B $\longrightarrow$ A est appélée application réciproque de f

N.B :

En pratique, Si f : $A \to B$ est une application,

- Pour savoir si f est injective, on suppose $f(x) = f(x')$ et on montre que $x = x'$
- Pour savoir si f est surjective, on se donne $y \in B$ et on cherche une solution $x \in A$ de L'équation $y = f(x)$.
- Pour savoir si f est bijective, on montre que $y = f(x)$. possède une unique solution $x \in A$.

EXEMPLES :

$f_1 : \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{matrix}$

- f_1 n'est pas injective car par exemple 1 et -1 ont la même image qui est 1
- f_1 n'est pas surjective car par exemple -1 n'a pas d'antécédent

$f_2 : \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{matrix}$

- f_2 n'est pas injective
- f_2 est surjective car l'équation $y = f(x)$ a une solution qui est : $\sqrt{y}$.

$g : \begin{matrix} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{matrix}$ est surjective et injective. C'est une bijection.

II. LA NOTION DE FONCTION

1. DEFINITION

Nous avons vu en classe de seconde qu'une fonction f : A→B (A et B étant des ensembles non vides) est une correspondance de A→B qui à chaque élément de A associe 1 ou 0 élément de B.

A est appelé ensemble de départ et B est appelé ensemble d'arrivée. Les éléments de A sont les antécédents tandis que les éléments de B sont les images.

Lorsque A et B sont des parties de $\mathbb{R}$, on dit que la fonction est une fonction numerique d'une variable réelle.

EXEMPLES :

A proposer par les apprenants.

REMARQUE :

Toute fonction n'est pas une application mais toute application est une fonction.

2. ENSEMBLE DE DEFINITION D'UNE FONCTION

L'ensemble de définition d'une fonction f notée Df est l'ensemble des éléments de l'ensemble de départ qui ont une image par f.

Exemples :

$f : \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 - \frac{3}{5}x + 4 \end{matrix}$ $\quad Df = \mathbb{R}$

$g : \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \frac{3x-2}{5-2x} \end{matrix}$ $Dg = \mathbb{R} / \left\{\frac{5}{2}\right\}$

N.B :

la détermination des domaines dans ces cas est liée aux contraintes de calculs dans $\mathbb{R}$.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

Pour chacune des fonctions ci-dessous, détermine le Df et dit si elle est injective, surjective, bijective.

a. $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -3x^3 - \frac{2}{5}x - 2 \end{array}$ $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 2}{5 - 2x} \end{array}$

b. $h : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2}{x-1} \end{array}$ $j : \begin{array}{l}]1;\infty[\to]1;\infty[\\ x \mapsto \frac{2}{x-1} \end{array}$

c. $h : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \sqrt{x-1} \end{array}$ $h : \begin{array}{l}]1;\infty[\to]1;\infty[\\ x \mapsto \sqrt{x-1} \end{array}$

LECON 2: Opérations sur les fonctions **DUREE : 100 Minutes**

COMPETENCES A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

A la fin de cette leçon, l'élève sera capable de :

- Faire la somme, le produit de deux polynômes ;
- Composer deux applications ;
- Déterminer l'ensemble de définition d'une somme, d'un produit, d'un quotient et de la composée de deux fonctions numériques.

PRE-REQUIS :

Soit la fonction f : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2-3x+2}{x-2} \end{array}$,

1. calculer les images par f des nombres -1, -$\frac{5}{2}$, 0, 2, 6
2. déterminer le domaine de définition de f
3. écrire sous forme d'intervalle le Df

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Soit les fonctions suivantes $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-2}$ et $g(x) = x^2+1$

1. Donne le Df sous forme d'intervalle
2. Soit la fonction h : $\begin{array}{ccc}]2;\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2-3x+2}{x-2} \end{array}$, la fonction h est-elle égale à la fonction f ? que peut-on dire des fonctions h et f .
3. Calcule f(3), g(2), g(f(3)) et f(g(3)) et conclure.
4. Calcule : $f(x)+g(x)$, $f(x).g(x)$ et $\frac{f(x)}{g(x)}$

RESUME :

1. RESTRICTION

Soit f : E ⟶ F une fonction où E et F sont deux ensembles non vides. Soit A une partie de E. On appelle restriction à A de la fonction f; la fonction g définie de A vers F par pour tout x ϵ A, g(x) = f(x) on note $g = f_{/A}$

EXEMPLE :

La fonction h : $\begin{array}{ccc}]2;\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2-3x+2}{x-2} \end{array}$ est la restriction sur] 2 ; ∞[de la fonction f :

$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2-3x+2}{x-2} \end{array}$

2. PROLONGEMENT

Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction où E et F sont deux ensembles non vides. Soit A une partie de E, si la fonction g définie de A vers F est la restriction à A de la fonction f alors la fonction f est un prolongement de la fonction g.

EXEMPLE :

Soit la fonction $h : \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{matrix}$ deux restrictions de la fonction h sont :

- $h1 : \begin{matrix} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{matrix}$
- $h2 : \begin{matrix} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -x \end{matrix}$

3. SOMME, PRODUIT, QUOTIENT

Soient f et g deux fonctions numériques d'ensembles de définition respectifs Df et Dg . On appelle :

- Somme de f et g la fonction notée f + g définie par : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- Produit de f et g la fonction notée f . g définie par : $(f.g)(x) = f(x).g(x)$
- Inverse de f la fonction notée $\frac{1}{f}$ définie par : $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$ avec $f(x) \neq 0$
- Quotient de f et g la fonction notée $\frac{f}{g}$ définie par : $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ avec $g(x) \neq 0$

N.B : $\mathbf{D_{f+g} = D_{f.g} = D_f \cap D_g}$ **;** $\mathbf{D_{\frac{1}{f}} = D_f \setminus \{x \in D_f \ , \ f(x) \neq 0\}}$

$$\mathbf{D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \setminus \{x \in D_g \, , g(x) \neq 0\}}$$

4. COMPOSITION

Soient f et g deux fonctions numériques d'ensembles de définition respectifs Df et Dg . On appelle composée de f et g la fonction notée $f \circ g$ définie par : $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

$(f \circ g)(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases}$

Exemple : $f(x) = \frac{x+5}{x-2}$ et $g(x) = \sqrt{x-1}$

- $(f \circ g)(x) = \frac{\sqrt{x-1}+5}{\sqrt{x-1}-2}$

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1} \neq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in [1;\ 5[\cup]5;\ +\infty[$$

Donc $D_{fog} = [1;\ 5[\cup]5;\ +\infty[$

- $(g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{x+5}{x-2} - 1}$

On calcule $(f \circ g)(10) = 8$ et $(g \circ f)(10) = \sqrt{\frac{7}{8}}$ et note en remarque que :

- En général, $f \circ g \neq g \circ f$

- $fof = id$; $f\,o\,id = f$; $id\,o\,f = f$

On appelle application réciproque de f l'application notée f^{-1} et qui est telle que $f^{-1}of = id$.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

1. Calcule fog et gof puis détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions

   a. $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -3x^3 - \frac{2}{5}x - 2 \end{array}$ $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 2}{5 - 2x} \end{array}$

2. Calcule $h(x) + j(x)$, $h(x).j(x)$ et $\frac{h(x)}{j(x)}$ puis donne le domaine de définition de chacune des fonctions obtenues.

$h : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2}{x-1} \end{array}$ $j : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \sqrt{x-1} \end{array}$

LECON 3: Courbe d'une fonction *DUREE : 50 Minutes*

COMPETENCES A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

A la fin de cette leçon, l'élève sera capable de :

- Montrer qu'un point de cordonnées connues appartient à la courbe d'une fonction ;
- Conjecturer l'ensemble de définition ; le sens des variations ; les asymptotes éventuelles, les éléments de symétrie par lecture graphique.

PRE-REQUIS :

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

ACTIVITÉ 1

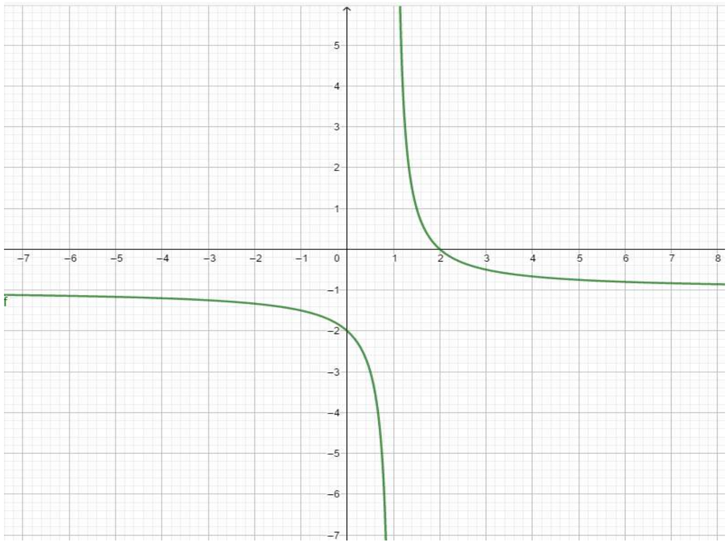
1. En utilisant l'expression algébrique de A(x) obtenue à la leçon 1, Compléter le tableau suivant :

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	6	7	8
A(x)												

2. Dans un repère orthogonal (O,I,J) tel que OI = 2cm et OJ = 0,5cm, construire les points de coordonnées (x , A(x)) obtenus dans le tableau ci-dessus. On appelle C l'ensemble des points M de coordonnées (x , A(x)) pour x appartenant à l'intervalle [0,8]. Tracer la courbe C .
3. Observer le point le plus « bas » de la courbe C ; quelles sont ses coordonnées ? Qu'en déduit-on pour l'aire A(x) ?

ACTIVITÉ 2

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction représentée par la courbe ci-dessus
2. Dressez son tableau de variations
3. Marque deux points M et N sur la courbe, puis construis leurs symétriques par rapport au point $A(1;\ -1)$. Que peut-on dire du point A ?



RESUME :

1. COURBE REPRESENTATIVE D’UNE FONCTION

Soit f une fonction numérique d’ensemble de définition Df. On appelle courbe représentative de f ou représentation graphique de f l’ensemble des ponts M de coordonnées (x, f(x)) tels que $x \in$ Df. On note généralement Cf la courbe représentative de f.

2. IMAGE DIRECTE-IMAGE RECIPROQUE D’UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION

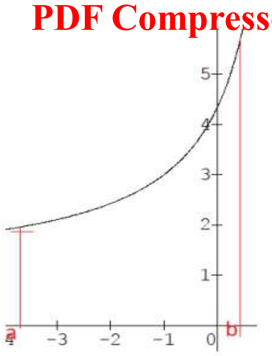
Soient E et F deux ensembles non vides, A une partie non vide de E, B une partie non vide de F et $f : E \longrightarrow F$ une fonction.

a. On appelle image directe de A par f et on note f(A) , l’ensemble des éléments de F qui sont images des éléments de A par f.
b. On appelle image réciproque de B par f et on note $f^{-1}(B)$ l’ensemble des éléments de E qui sont antécédents des éléments de B par f.

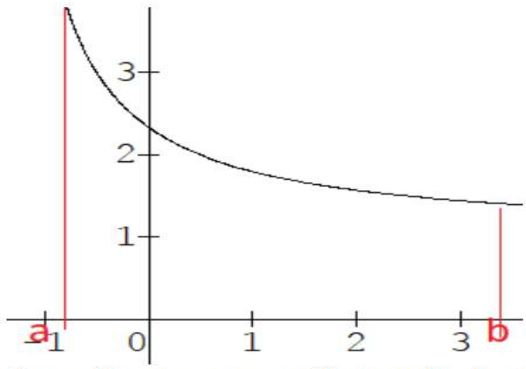
REMARQUES ET NOTATION

- f(A) est une partie de F. $f(A) = \{f(x) / x \in A\}$
- $f^{-1}(B)=\{ x \in E / f(x) \in B \}$

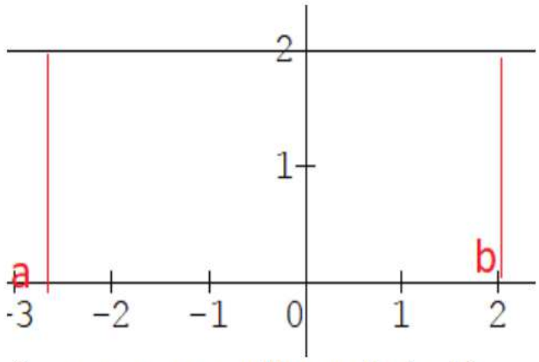
3. VARIATIONS D’UNE FONCTION



f est croissante sur l'intervalle [a ; b]

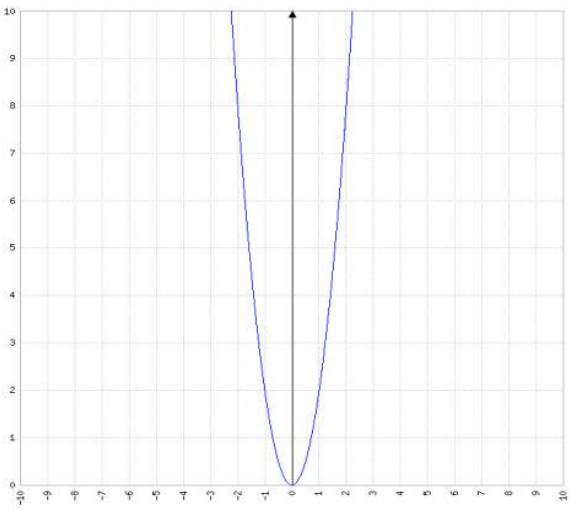


f est décroissante sur l'intervalle [a ; b]

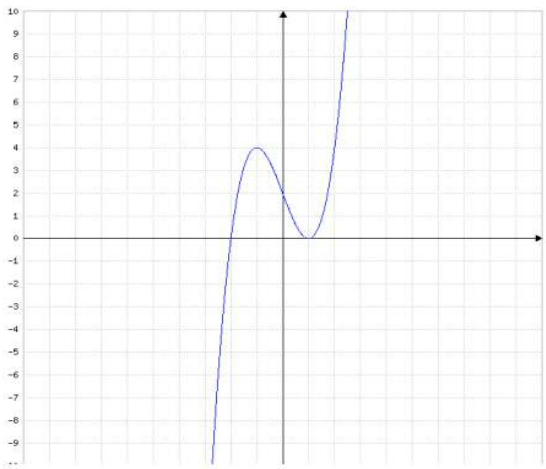


f est constante sur l'intervalle [a ; b]

4. RECONNAITRE UNE INJECTION, UNE SURJECTION OU UNE BIJECTION A PARTIR DE LA COURBE



GRAPHE 1



GRAPHE 2

En considérant la figure ci-dessus, dire sur chaque graphique si la fonction représentée est injective, surjective ou bijection

LECON4: Propriétés des fonctions : parité, éléments de symétrie, périodicité

DUREE : 50 Minutes

COMPETENCES A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

A la fin de cette leçon, l'élève sera capable de :

- Montrer qu'une fonction est paire ; impaire ou périodique.
- Justifier qu'un point est centre de symétrie d'une courbe.
- Justifier qu'une droite d'équation x = a est un axe de symétrie d'une courbe.

PRE-REQUIS :

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

ACTIVITÉ 1:

Soit les fonctions suivantes : $f\ :\ \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -3x^2-2\end{array}$, $h\ :\ \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{2}{5}x^3\end{array}$ $g\ :\ \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{3x+2}{5-2x}\end{array}$

1. Calcule f(-5) et f(5). Quel constat peut-on faire ? compare f(-x) et f(x) .
2. Compare h(-x) et h(x)
3. Peut-on avoir un résultat similaire avec g ?

ACTIVITÉ 2 :

Soit la fonction $f(x) = \sin x$

1. Compare f(x) avec $f(x+2\pi)$; $f(x+4\pi)$; $f(x+2\pi k)$
2. Quelle conjecture peut-on faire ?

RESUME :

1. FONCTION PAIRE – FONCTION IMPAIRE

Soit f une fonction, D_f son domaine de définition on dit que :

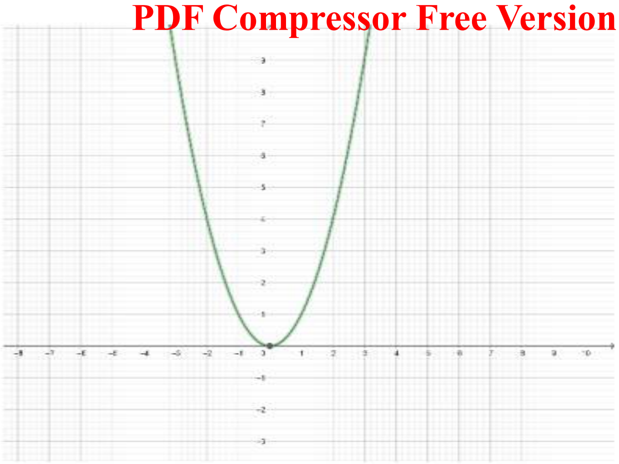
- f est paire si pour tout $x \in D_f$ tel que $-x \in D_f$ on a $f(-x) = f(x)$
- f est impaire si pour tout $x \in D_f$ tel que $-x \in D_f$ on a $f(-x) = -f(x)$

EXEMPLE :

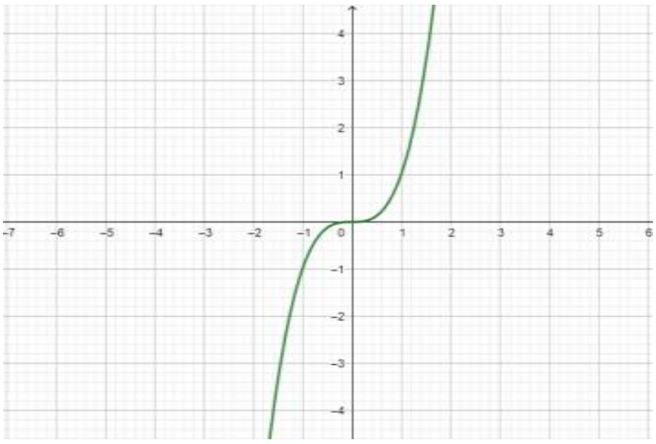
$f\ :\ \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -3x^2\end{array}$ est une fonction paire ; $f\ :\ \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^5\end{array}$ est impaire

REMARQUE :

- La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.



f est paire



f est impaire

2. FONCTION PERIODIQUE

soit f une fonction, d'ensemble de définition Df . Soit T un nombre réel strictement positif. On dit que f est périodique de période T si pour tout x ϵ Df tel que x + T ϵ Df on a : f(x +T) = f(x)

EXEMPLE :

les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de périodes 2π

3. ELEMENTS DE SYMETRIE D'UNE COURBE

- **centre de symétrie :** Soit une f fonction, (Cf) sa courbe représentative. On dit que le point I(a, b) est centre de symétrie de (Cf) si pour tout x de Df tel que a - x et a + x appartiennent à Df , on a : f(a – x) + f(a + x) = 2b.
- **axe de symétrie :** Soit une f fonction, (Cf) sa courbe représentative. On dit que la droite (D) d'équation x = a est un axe de symétrie de (Cf) si pour tout x de Df tel que a - x et a + x appartiennent à Df , on a : f(a – x) = f(a + x) .

LECON 5 : Fonctions associées à une fonction donnée — *DUREE : 100 Minutes*

COMPETENCES A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

A la fin de cette leçon, l'élève sera capable :

- A partir de la courbe d'une fonction f, de représenter les fonctions : $x \rightarrowtail f(x-a)$; $x \rightarrowtail f(x)+b$; $x \rightarrowtail f(x-a)+b$; $x \rightarrowtail -f(x)$; $x \rightarrowtail f(-x)$; $x \rightarrowtail |f(x)|$; $x \rightarrowtail f(|x|)$.
- De tirer quelques informations sur les courbes des fonctions associées à une fonction donnée ; sens des variations ; parité, éléments de symétrie ; etc.

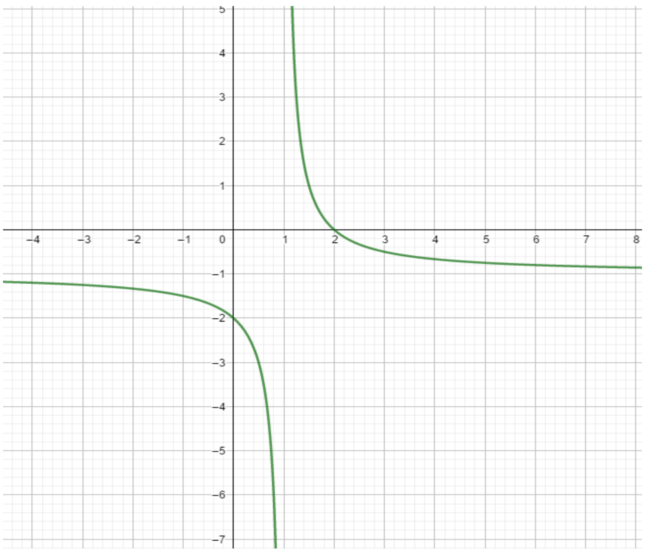
PRE-REQUIS :

- Construire l'image d'un point par un translation
- Construire l'image d'un point par une symétrie

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

ACTIVITÉ 1 :

On considère la courbe ci-dessous qui est la courbe d'une fonction f



1. Reproduis la courbe sur une feuille de papier puis construis en rouge son symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
2. Complete le tableau puis place les points du tableau sur la figure. Que constates-tu ?

x	-3	-2	0	2	3	4	5	8
- f(x)								

3. Est-ce possible de déterminer les variations de la fonction $x \rightarrowtail -f(x)$ en fonction de celles de la fonction f ?

ACTIVITÉ 2 :

On considère la courbe ci-dessous qui est la courbe d'une fonction f

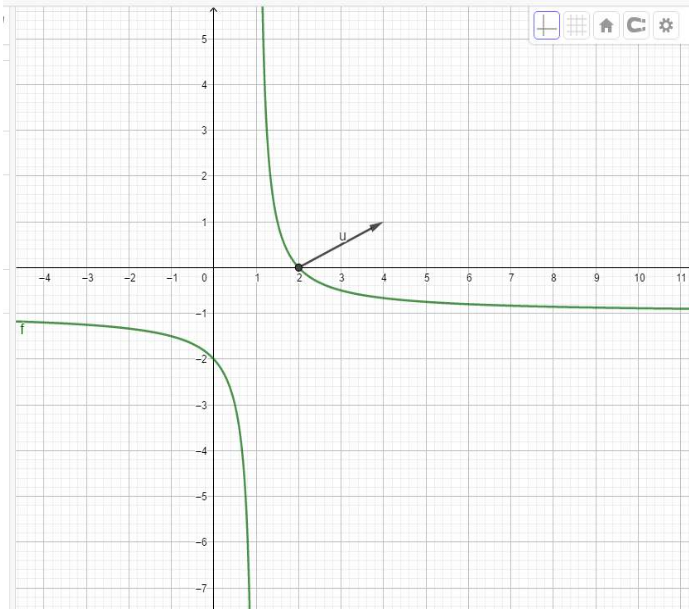
1. Reproduis la courbe sur une feuille de papier puis construis en rouge l'image de la courbe par la translation de vecteur $\vec{u}(2,1)$.

x	-3	-2	0	2	3	4

2. Complete le tableau

f(x - 2) + 1						

puis place les points du tableau sur la figure. Que constates-tu ?



3. Est-ce possible de déterminer les variations de la fonction $x \mapsto f(x+2)+1$ en fonction de celles de la fonction f ?

RESUME :

1. La courbe de la fonction $x \mapsto -f(x)$ s'obtient de celle de f en faisant une symétrie par rapport à l'axe des abscisses. Ses variations sont contraires à celles de f .
2. La courbe de la fonction $x \mapsto f(-x)$ s'obtient de celle de f en faisant une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. Ses variations sont contraires à celles de f .
3. La courbe de la fonction $x \mapsto f(x-a)$ s'obtient de celle de f en faisant une translation de vecteur $\vec{u}(a,0)$. Ses variations sont identiques à celles de f .
4. La courbe de la fonction $x \mapsto f(x)+b$ s'obtient de celle de f en faisant une translation de vecteur $\vec{u}(0,b)$. Ses variations sont identiques à celles de f .
5. La courbe de la fonction $x \mapsto f(x-a)+b$ s'obtient de celle de f en faisant une translation de vecteur $\vec{u}(a,b)$. Ses variations sont identiques à celles de f .

EXERCICES D'APPLICATIONS :

A partir d'une courbe donnée, construire les des fonctions ci-dessous et dresser leurs tableaux de variations

1. $x \mapsto |f(x)|$;
2. $x \mapsto f(|x|)$

CHAPITRE: LIMITES ET CONTINUITES

LECON 1 : LIMITES *DUREE : 100 Minutes*

MOTIVATION :

- **Déployer un raisonnement mathématique et résoudre des problèmes relatifs à des situations de vie.**
- **Communiquer des informations comportant des nombres ….**

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES :

- Calculer la limite d'une fonction au voisinage d'un réel x_0 et à l'infinie.

PRÉ-REQUIS :

Soit $f(x) = -3x^2 - 2x + 10$

Calculer $f(-1)$; $f(0)$ et $f(1)$

SITUATION PROBLEME :

Sous l'effet de l'érosion une roche sédimentaire perd sa valeur au fil du temps. Une étude scientifitique permet de modéliser par $f \to \frac{3}{t+1}$ la quantité de matière perdue en fonction du temps (temps en siècle). Quelle quantité de matière aura-t-elle perdue au bout d'un demi-siècle.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{3}{x+1}$; $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

a) Recopie et complète le tableau.

	-5,9	-4,9	-3,9	-2,9	-1	2,9	3,9	4,9	5,9

b) Quel constat fais-tu ?

RESUME :

1- LIMITE D'UNE FONCTION EN UN REEL A

Soit f une fonction numérique et **a** un réel. Si f admet une limite en **a** alors on note $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

REMARQUE :

Si la limite d'une fonction en un réel **a** existe alors celle-ci est unique.

EXEMPLE :

On donne $h(x) = \frac{-5}{x-2}$ et $g(x) = -x^2 + 3$.Calculer la limite de h en 0 et celle de g en -2

2- LIMITE DES FONCTIONS A L'INFINI

a. DEFINITIONS

Soit f une fonction numérique définie sur R.

- Si f(x) est aussi grand dès que x est assez grand, on dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- Si f(x) est aussi grand dès que x est assez petit, on dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et note :
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $[b;+\infty[$ $(respectivement\ ]-\infty;b]\ )\ avec\ b\in R.$

- Si la distance $|f(x)-l|$ est très petite dès que x est assez grand, on dit que f a pour limite l en $+\infty$. On note: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$
- Si la distance $|f(x)-l|$ *est très petite dès que x est assez petit,on dit* que f a pour limite l en $-\infty$. On note : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$

EXEMPLE : On donne $h(x) = \frac{x+3}{x-2}$ et $g(x) = -x^3 + 3$. *Calculer la limite de* $h(x)$ *et* $g(x)$ *en* $+\infty$ *et en* $-\infty$.

NB :

- La limite d'une fonction polynôme en l'infini est égale à la limite de son monôme du plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle en l'infini est égale au quotient du rapport des monômes du plus haut degré au numérateur et au dénominateur.

b. LIMITES EN L'INFINI DES FONCTIONS DE REFERENCE

Fonctions	Limites en $+\infty$	Limites en $-\infty$
$f(x) = a,\quad a \in R$	a	a
$f(x) = x$	$+\infty$	$-\infty$
$f(x) = ax$	$\begin{cases} -\infty & \text{si } a < 0 \\ +\infty & \text{si } a > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} -\infty & \text{si } a > 0 \\ +\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$
$f(x) = x^n \quad (n \in IR^+)$	$+\infty$	$\begin{cases} -\infty & \text{si n est impair} \\ +\infty & \text{si n est pair} \end{cases}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	0	0
$f(x) = \frac{1}{x^{n+1}}$	0	0
$f(x) = \sqrt{x}$	$+\infty$	Impossible

c) LIMITE A GAUCHE- LIMITE A DROITE

On dit qu'une fonction f admet une limite à gauche (respectivement à droite) admet une limite en a (cette limite pouvant être réelle, $+\infty$ *ou* $-\infty$). On note : $\lim_{x\to a^-} f(x)$ *pour la limite à gauche en a et* $\lim_{x\to a^+} f(x)$ pour la limite à droite en a.

REMARQUE :

Pour que la limite d'une fonction en un réel existe, il n'est pas nécessaire que la fonction soit définie en ce réel, mais elle doit être définie au voisinage de ce réel.

$\lim_{x\to a} f(x) = l$ si et seulement si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = l$

EXEMPLE :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Déterminer la limite à gauche et à droite de f *en* 0 *puis conclure*.

3- LIMITE ET OPERATIONS SUR LES FONCTIONS

Soit f et g deux fonctions l et l' deux réels ; a est élément de IR $\cup \{-\infty ; +\infty\}$

- SOMME DE FONCTIONS

Limite de f en a	l	l'	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Limite de g en a	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Limite de (f +g) en a	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

- PRODUIT DE FONCTIONS

Limite de f en a	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Limite de g en a	l'	$l'(l' \neq 0)$	$l'(l' \neq 0)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
Limite de fg en a	ll'	$\begin{cases} -\infty & \text{si } l' < 0 \\ +\infty & \text{si } l' > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} -\infty & \text{si } l' > 0 \\ +\infty & \text{si } l' < 0 \end{cases}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

- QUOTIENT DE FONCTIONS

Limite de f en a	l	l	$l(l \neq 0)$	∞	∞	0
Limite de g en a	$l'(l' \neq 0)$	∞	0	l'	∞	0
Limite de $\frac{f}{g}$ en a	$\frac{l}{l'}$	0	∞	∞	FI	FI

REMARQUE :

Les résultats $+\infty - \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; $0 \times \infty$ sont appelés formes indéterminées (FI). Lorsqu'on est face à l'une de ces formes il suffit de lever l'indétermination.

Méthodes pour lever l'indétermination

EXEMPLES :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2-2x+4 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+3}{x-2} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{3x} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}(2x+5)$$

4- Inégalités et limites

Propriétés de comparaison

Soient f ; g et h des fonctions

- Comparaison des limites :

Si $f < g$ sur un intervalle $]a\,;\,+\infty[$ avec $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = l'$ alors $l \leq l'$

- Encadrement (théorème des gendarmes)

Si $g < f < h$ sur un intervalle $]a\,;\,+\infty[$ avec $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = l$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$

Exercice d'application

Soient les fonctions suivantes : $f(x) = -3x^3 + x - 7$; $g(x) = \frac{x^2+3}{-x+2}$ et $h(x) = \frac{-x^2+1}{x+1}$

1) Calculer la limite de f(x) quand x tend vers 0 ; - 1 ; $+\infty$ $et -\infty$.
2) Calculer la limite de g(x) aux bornes de son domaine de définition.
3) Calculer la limite de h(x) quand x tend vers -1.

Leçon 2 : CONTINUITES *DUREE : 100 Minutes*

MOTIVATION :

- Déployer un raisonnement mathématique et résoudre des problèmes relatifs à des situations de vie.

- Communiquer des informations comportant des nombres ….

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES :

- Etudier la continuité d'une fonction en un point x_0 et sur un intervalle.

PRÉ-REQUIS :

On donne la fonction $f(x) = \frac{x+2}{x}$. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

SITUATION PROBLÈME :

Monsieur Onana souhaite se rendre au 8ème étage du MINESEC. Or sa voisine Mme Ngono travaille au 3ème étage, et il ne souhaite pas tomber sur elle. Il se demande s'il peut quitter du 1er étage au 7ème étage sans passer par le 3ème étage. Aide Monsieur Mbala à résoudre ce problème. NB : On pourra faire à l'aide d'un graphe la courbe en trait continu pour dire que la fonction est continue sur l'intervalle.

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE :

On donne : $f(x) = -x^2 - 2x + 9$

a) Calculer f(-2).
b) Calculer la limite de f(x) lorsque x tend vers -2.
c) Comparer les deux résultats précédents.

RÉSUMÉ :

1) CONTINUITE EN UN REEL a

DÉFINITION

Soient f une fonction numérique d'ensemble de définition D_f et **a** un réel. On dit que f est continue en **a** si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiés :

- $a \in D_f$
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

EXEMPLE :

On donne : $f(x) = -x^2 - 3x + 4$. Déterminer D_f puis étudier la continuité de f en -1

2) CONTINUITE A GAUCHE ET A DROITE EN UN REEL x_0

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant le réel x_0.

- f est continue à gauche de x_0 si et seulement si $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$
- f est continue à droite de x_0 si et seulement si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

EXEMPLE :

soit f la fonction définie par : $x \to \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{si } x \geq 0 \\ 3x - 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Etudier la continuité de f en 0.

PROPRIÉTÉS

- toute fonction continue en x_0 est continue à gauche et à droite de x_0.
- toute fonction continue à gauche et à droite de x_0 est continue en x_0.
- f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

3) CONTINUITE SUR UN INTERVALLE

DÉFINITION

Une fonction f est dite continue sur un intervalle I lorsqu'elle est continue en tout $x_0 \in I$.

PROPRIÉTÉS

- Les fonctions polynômes sont continues sur IR.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur leur D_f.
- Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$, $a < b$ et $f(a) \times f(b) < 0$ alors f s'annule sur $]a\,;b[$.
- Si f est une fonction continue sur un intervalle I de IR et si f ne s'annule pas sur I alors f garde un signe constant sur I.

4) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I ; soit un réel $x_0 \in I$.

- Si les fonctions f et g sont continues en x_0, alors :
  - La fonction $(f + g)$ est continue en x_0
  - La fonction $(f \times g)$ est continue en x_0
  - -La fonction k.f est continue en x_0 ; où k est une constante.
- Si les fonctions f et g sont continues en x_0 et $g(x_0) \neq 0$ alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en x_0
- Si la fonction g est continue en x_0 et la fonction f continue en $g(x_0)$, alors f o g est continue en x_0
- Si f est une fonction continue en x_0 et $f(x_0) \geq 0$, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en x_0.

5) PROLONGEMENT PAR CONTINUITE

DÉFINITION

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f ; x_0 n'appartenant pas à D_f mais x_0 est une borne de Df. On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ avec $l \neq \infty$ et $x_0 \neq \infty$

La fonction g définie par $\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ g(x_0) = l \end{cases}$ est appelée prolongement par continuité de f en x_0.

EXERCICE D'APPLICATION

Soit la fonction définie de IR vers IR par $f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2 - 1}$

a) f est-elle prolongeable par continuité en 1 ? en -1 ?
b) Si oui donner le prolongement par continuité de f.

CHAPITRE : DÉRIVABILITÉ ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION

LEÇON 1 : Définition de la dérivabilité — Durée : 50 Minutes

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES SPECIFIQUES:

A la fin de ce chapitre, l'élève sera capable de :

– Définir le nombre dérivé d'une fonction en un réel.

– Etudier la dérivabilité d'une fonction en un point et dans un intervalle.

MOTIVATION

La notion de dérivée peut permettre de déterminer la vitesse d'un mobile en un instant donné. Dans cette leçon nous verrons comment déterminer le nombre dérivée d'une grandeur pour une inconnue particulière.

PRESREQUIS :

Calculer les limites $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3}$; $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x}$; $\lim_{x\to -1} 7x+9$

SITUATION PROBLEME :

Un véhicule en mouvement rectiligne a une équation horaire $x(t) = 3t+2$ où t est en seconde, déterminer sa vitesse à l'instant $t = 5min$

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Soient $f et g$ deux fonctions définies par $f(x) = 3x+2$ et $g(x)=\sqrt{x}$.

1) Déterminer leurs domaines de définitions.

2) a. Calculer $\lim_{x\to 300} f(x)$ et $\lim_{x\to 0^+} g(x)$.

b. f et g sont'elles continues en 300 et 0 respectivement?

3)a. Calculer $\lim_{x\to 300^+} \frac{f(x)-f(300)}{x-300}$; $\lim_{x\to 300^-} \frac{f(x)-f(300)}{x-300}$ et $\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$,

b. Lesquelles des trois limites sont 'elle des réels ? Comparez-les.

4) En physique, la vitesse instantanée à un instant $t_0$est définie par $x'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ où $x(t)$ est le déplacement en fonction du temps t en seconde.

a. Si $x(t) = 3t+2$ et t_0=5min, alors déduire la vitesse du mobile $x'(t_0)$ après 5min de mouvement.

b. Que représente $x'(300)$ pour $x(t)$?

SOLUTION

Le domaine de f est $\mathbb{R}$ et celui de g est $[0\ ;+\infty[$

1) a/ $\lim_{x \to 300} f(x) = 902$ et $\lim_{x \to 0^+} g(x) = 0$

b/ f est continue en 300 car $\lim_{x \to 300} f(x) = f(300)$ et g est continue en 0 car $\lim_{x \to 0^+} g(x) = g(0)$

2) a/ $\lim_{x \to 300^+} \frac{f(x)-f(300)}{x-300} = \lim_{x \to 300^+} \frac{3x+2-902}{x-300} = \lim_{x \to 300^+} \frac{3(x-300)}{x-300} = 3$

$\lim_{x \to 300^-} \frac{f(x)-f(300)}{x-300} = \lim_{x \to 300^-} \frac{3x+2-902}{x-300} = \lim_{x \to 300^-} \frac{3(x-300)}{x-300} = 3$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

b/ $\lim_{x \to 300^+} \frac{f(x)-f(300)}{x-300} = \lim_{x \to 300^-} \frac{f(x)-f(300)}{x-300} = 3 \in \mathbb{R}$

4)a/ Comme 5min= 300s, on a $x'(300) = \lim_{t \to 300} \frac{x(t)-x(5)}{t-t_0} = 3$ d' après 3)a/

b/ $x'(300)$ represente le nombre dérivé de x en 300.

RESUME

1) NOMBRE DÉRIVÉ EN UN POINT x_0

DÉFINITION :

Soit f une fonction définie dans un intervalle I et $x_0 \in$I. on dit que f est dérivable en x_0 si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est finie (c'est-à-dire $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. = a \in \mathbb{R}$). Si f est dérivable en x_0 alors **le nombre dérivé de f en** x_0 est le réel $f'(x_0)$ tel que $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

EXEMPLES :

1- la fonction f de l'activité est dérivable en 300 car $\lim_{x \to 300} \frac{f(x)-f(300)}{x-300} = 3$ et le nombre dérivé de f en 300 est $f'(300) = 3$ tandis que la fonction g n'est pas dérivable en 0 car $\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = +\infty$

2- Soit la fonction définie par $h(x) = x^2$. Pour x_0=2, on a $\lim_{x \to 2} \frac{h(x)-h(2)}{x-2} = 4$. Alors h est dérivable en x_0=2 et le nombre dérivé en x_0=2 est $h'(2) = 4$.

REMARQUE :

L'expression $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est appelé taux de variation de f en x_0.

PROPRIÉTÉS:

P $_1$: Soit f unefonction.Si f estdérivableen x_0, alors f est continue en x_0.La réciproque est fausse.

EXEMPLE :

La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

P $_2$: On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I (I $\subset$Df) si elle est dérivable en tout point x_0 de I.

EXEMPLES :

- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

2) DÉRIVABILITÉ À GAUCHE- DÉRIVABILITÉ À DROITE

DÉFINITION :

Une fonction f est dérivable en x_0 à droite si $\lim_{x \to x^+_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_d(x_0)$ est un réel.

Une fonction f est dérivable en x_0 à gauche si $\lim_{x \to x^-_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_g(x_0)$ est un réel.

Une fonction f **est dérivable en** x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en x_0 et le nombre dérivé de f à gauche en x_0 est égale au nombre dérivé de f à droite en x_0, c'est-à-dire

$$f'_d(x_0) = f'_g(x_0).$$

REMARQUE :

-Si une fonction f est dérivable à gauche et à droite de x_0 sans être dérivable en x_0 alors la courbe de f admet en x_0 deux demi tangentes. Dans ce cas, le point d'abscisse x_0 est appelé **point anguleux.**

EXEMPLE :

Etudier la dérivabilité de la fonction $f(x)=|x|$ en $x_0=0$

On a $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ et $f(0)=0$ alors :

- $\lim_{x\to 0^<} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^<} \frac{-x-0}{x-0} = -1$: f est dérivable à gauche de 0.
- $\lim_{x\to 0^>} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^>} \frac{x-0}{x-0} = 1$: f est dérivable à droite de 0.

Comme $\lim_{x\to 0^<} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim_{x\to 0^>} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ alors f n'est pas dérivable en 0. Par conséquent sa courbe représentative admet en 0 un point anguleux.

EXERCICES D'APPLICATION :

1) Soit f une fonction définie par $f(x)= \begin{cases} -7x + 9 \text{ si} x > 1 \\ 5x - 3 \text{ si} x \leq 1 \end{cases}$

   a) f est' elle continue en 1 ?
   b) Etudier la dérivabilité à droite et à gauche de 1.
   c) En déduire $f'(1^+)$ et $f'(1^-)$
   d) f est 'elle dérivable en 1 ?
   e) Quelle est la nature du point A$\binom{1}{2}$?

2) Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x^2+3x}{x+2}$

   a) Déterminer le domaine de définition de g.
   b) Etudier la continuité de g en 3 et -2.
   c) Etudier la dérivabilité de g en 3 et -2.

LEÇON 2: Calcul des dérives **Durée : 100 Minutes**

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES SPECIFIQUES:

A la fin de ce chapitre, l'élève devra être capable de :

– Définir la fonction dérivée d'une fonction.

– Calculer la dérivée d'une fonction dérivable.

-Interpréter graphiquement le nombre dérivé.

MOTIVATION

La notion de dérivée peut permettre de déterminer la vitesse d'un mobile en un instant quelconque. Dans cette leçon nous verrons comment déterminer la dérivée d'une grandeur pour une inconnue quelconque.

CONTROLE DES PREREQUIS

1) Soit f une fonction dérivable en x_0, définir $f'(x_0)$

2) Ecrire sans radical au numérateur l'expression $\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ pour x réel positif distinct de 4

3) Simplifier les fractions $\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}$ et $\frac{x^2-9}{x-3}$

SITUATION PROBLEME :

Un véhicule en mouvement rectiligne a une équation horaire $x(t) = 5t^2 + 1$ où t est en seconde, déterminer sa vitesse à l'instant t quelconque.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

1) Soient les fonctions f , g, q , h *et* t dérivables et définies par : $f(x) = 5x^2 + 1$ $g(x) = \sqrt{x}$; $q(x) = 7$; $h(x) = \frac{1}{x}$; $t(x) = ax + b$ où a et b sont des réels.

a. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, calculer $f'(x_0)$ puis déduire l'expression de $f'(x)$ pour tout réel x.
b. Soit $x_0 \geq 0$, calculer $g'(x_0)$ puis déduire l'expression de $g'(x)$ pour tout reel x strictement positif.
c. Soit $x_0 \neq 0$, calculer $h'(x_0)$ puis déduire l'expression de $h'(x)$ pour tout reel x non nul.
d. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, calculer $t'(x_0)$ puis déduire l'expression de $t'(x)$ pour tout réel x.
e. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, calculer $q'(x_0)$ puis déduire l'expression de $q'(x)$pour tout réel x.

2) Dans cette partie f et g sont deux fonctions quelconques
   a. Soit $x_0 \geq 0$, calculer $(f+g)'(x_0)$, puis déduire $(f+g)'$(x) pour tout réel x positif.

b. Soit $x_0 \geq 0$; sachant que $(fg)(x)$ - $(fg)(x_0)$ =$f(x)g(x) - f(x_0)g(x)$ +$f(x_0)\, g(x)$–$f(x_0)g(x_0)$, calculer $(f.g)'(x_0)$, puis déduire l'expression de $(fg)'(x)$ pour tout réel x.

c. Sachant que $f(x)g(x_0) - g(x)f(x_0)$ =$f(x)g(x_0) - g(x)f(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)$,

montrer de même que $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$

SOLUTION:

a. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{5x^2+1-(5{x_0}^2+1)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{5x^2-5{x_0}^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{5(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = 10x_0$;

d'où $f'(x) = 10x$ pour tout réel x ;

b. $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$;

d'où $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pour tout réel x strictement positif.

c. $\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} - \frac{\frac{x-x_0}{xx_0}}{x-x_0} = -\frac{1}{{x_0}^2}$;

$h'(x) = -\frac{1}{x^2}$ pour tout réel x non nul.

d. $\lim_{x\to x_0} \frac{t(x)-t(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{ax-ax_0}{x-x_0} = a$

d'où $t'(x) = a$ pour tout réel x .

e. $\lim_{x\to x_0} \frac{q(x)-q(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{7-7}{x-x_0} = 0$;

d'où $q'(x) = 0$ pour tout réel x .

2)a. $(f+g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)'(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} f'(x_0) + g'(x_0)$

d'où $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ pour tout réel x positif.

b. $\lim_{x\to x_0} \frac{fg(x)-fg(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} =$

$\lim_{x\to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x-x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$

d'où $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ pour tout réel x.

c. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)g(x_0)-g(x)f(x_0)}{g(x)g(x_0)}}{x-x_0}$

$= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)g(x_0)-g(x)f(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{g(x)g(x_0)}}{x-x_0}$

$= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{g(x_0)(f(x)-f(x_0))-f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{g(x)g(x_0)}}{x-x_0}$

$= \lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x_0)(f(x)-f(x_0))-f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0} \times \frac{1}{g(x)g(x_0)}$

$= \frac{f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{(g(x_0))^2}$

donc $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$

RESUME :

1) FONCTION DÉRIVÉE

Soit K l'ensemble de dérivabilité de f. La fonction dérivée de f sur I est la fonction notée $\boldsymbol{f}'$ qui, à tout point x de K, on associe son nombre dérivé $\boldsymbol{f'(x)}$.

En effet soit $x_0 \in$K , $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

2) CALCUL DES DÉRIVÉES

Soit f une fonction et f' la dérivée de f. on a le tableau suivant :

Fonction	Fonction dérivée	Ensemble de dérivabilité
$f(x) = k, k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$f(x) = cosx$	$f'(x) = -sinx$	$\mathbb{R}$
$f(x) = sinx$	$f'(x) = cosx$	$\mathbb{R}$
$f(x) = tanx$	$f'(x) = 1 + tan^2x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

3) OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et k un nombre réel non nul. Les formules ci-dessous se démontrent de la même façon que dans l'activité.

Fonction	Fonction dérivée
$f + g$	$f' + g'$
fg	$f'g + g'f$
kf	kf'

$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - g'f}{g^2}$
f^n	$nf'f^{n-1}$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$f(ax+b)$	$af'(ax+b)$
fog	$g' \times f'og$

EXERCICE D'APPLICATION :

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions définies ci-dessous :

$f(x) = x^5 + x^2 + 7$; $f(x) = (4x+7)(x-2)$; $f(x) = \frac{1}{3x+7}$; $g(x) = \frac{2x-5}{x+3}$:

$f(x) = (3x-4)5$ $t(x)=\sqrt{3x^2+1}$ et $h(x) = sin(2x-5)$.

LEÇON 3: Equation de la tangente à la courbe d'une fonction *Durée : 50 Minutes*

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES :

A la fin de cette leçon ; l'élève doit être capable de :

- déterminer l'équation de la tangente à la courbe d'une fonction ;

- Déterminer l'approximation affine d'une fonction en un réel.

MOTIVATION :

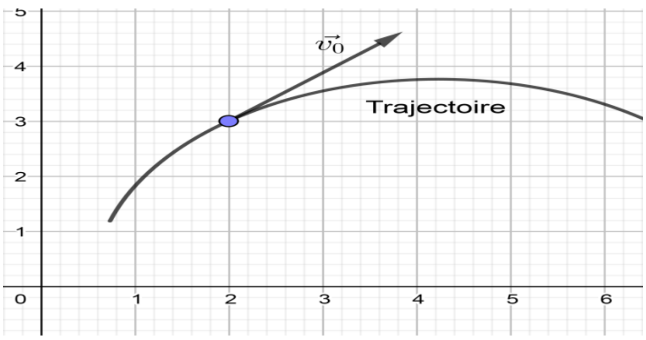
Certains dessins d'art mettent en relief des droites tangentes à une courbe, En outre la détermination de la direction du vecteur vitesse instantané en un point de la trajectoire d'un mobile met aussi en relief la notion de tangente à la courbe. Dans cette leçon nous verrons comment déterminer une équation de cette tangente.

CONTROLE DES PRES REQUIS :

1) Donner l'expression du coefficient directeur d'une droite (AB) dans un repère orthonormé
2) Soit f une fonction dérivable en x_0, définir $f'(x_0)$
3) Soit M$\binom{x}{y}$ un point quelconque de la courbe (C) d'une fonction f , Comparer y et $f(x)$
4) Comment est la direction de la vectrice vitesse en tout point d'une trajectoire d'un mobile ?

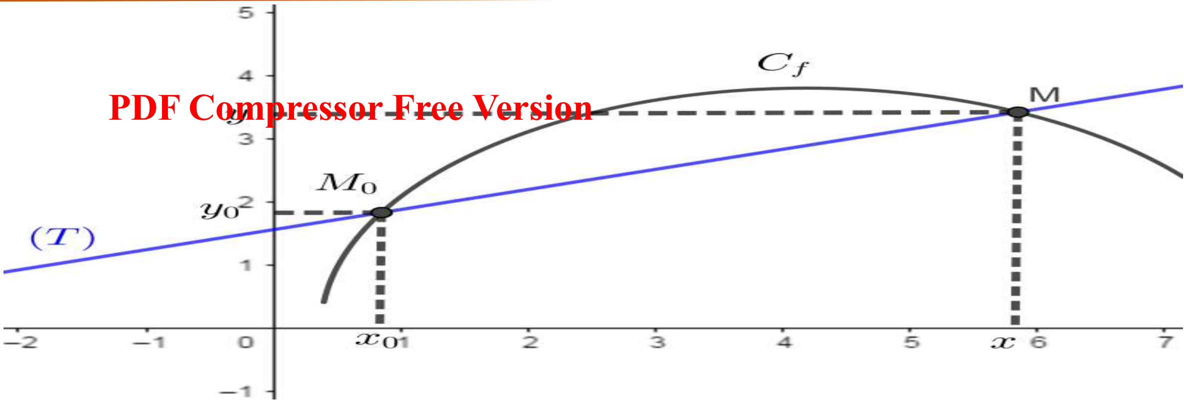
SITUATION PROBLEME :

La trajectoire d'un mobile dans un plan est représentée par la figure ci-dessous. Comment déterminer et représenter la direction exacte du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0}$ en un point M_0 quelconque de cette trajectoire ?



ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

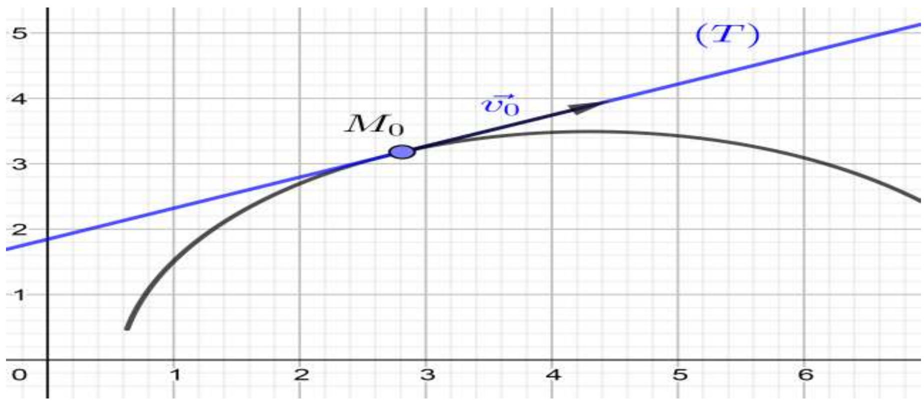
Soit (C_f) la courbe d'une fonction dérivable , soit (T) une droite coupant (C_f) en deux points M_0 et M d'abscisses respectifs x_0 et x comme l'indique la figure ci-dessousdans un repère orthonormé.



1. Rappeler l'expression du coefficient directeur a de la droite (T) passant par M et M_0.
2. En déduire l'expression de y en fonction de a , (x-x_0) et y_0
3. Donner la valeur de $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
4. En déduire la valeur de a lorsque x tend vers x_0
5. Comment appelle t'on la droite (T) lorsque x tend vers x_0? donner son équation cartésienne
6. Quelle est donc la direction exacte du vecteur vitesse instantanée en M_0 ?

SOLUTION :

1. Puisque M$\binom{x}{y}$ et M_0 $\binom{x_0}{y_0}$ appartiennent à (T) on a $a = \frac{y-y_0}{x-x_0}$ avec $y = f(x)$ et $y_0 = f(x_0)$
2. D'où $y - y_0 = a(x - x_0)$, donc y = $a(x - x_0) + y_0$.
3. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ car f est dérivable.
4. lorsque x tend vers x_0 , $a = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$
5. lorsque x tend vers x_0 ,M$\binom{x}{y}$ et M_0 $\binom{x_0}{y_0}$ sont confondus et la droite (T) est appelée tangente à (C_f) au point d'abscisse x_0.
   Son équation est $y = f'(x_0)\,(x - x_0) + y_0$.
6. la direction exacte du vecteur vitesse instantanée en M_0 est celle de la tangente en M_0 à la trajectoire.



RESUME

1) EQUATION DE LA TANGENTE A LA COURBE D'UNE FONCTION

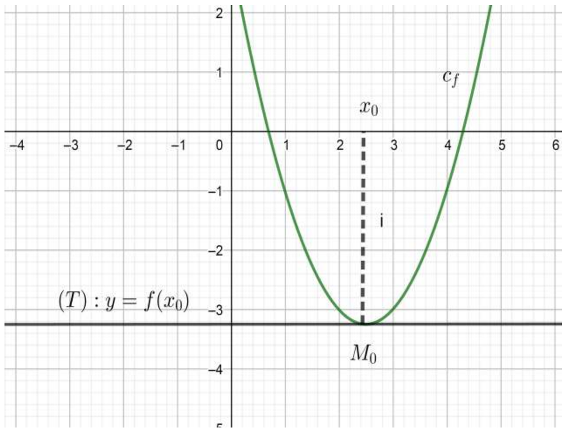
Soit f une fonction, (C) sa courbe représentative et A un point de (C) d'abscisse x_0. Si f est dérivable en x_0 , alors (C) admet en A une tangente (T)dont le coefficient directeur est $f'(x_0)$. La tangente (T) à (C) en x_0 est d'équation $\boldsymbol{(T)\ : y = f'(x_0)\ (x - x_0) + f(x_0).}$

EXEMPLE :

Soit $f(x) = x^2, f$ est dérivable en x_0=2 et $f'(2) = 4$ alors sa courbe représentative admet en 2 une tangente (T) d'équation (T) : $y = 4x - 4$

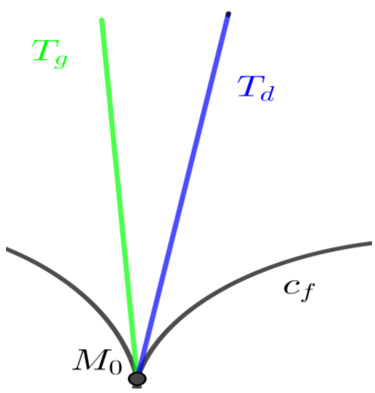
REMARQUE :

- -Si $f'(x_0) = 0$,alors (C) admet au point d'abscisse $x_0$une tangente parallèle à l'axe des abscisses (tangente horizontale) d'équation $y = f\ (x_0)$.



- Lorsqu'une fonction f admet en un point d'abscisse $\boldsymbol{x_0}$ un point anguleux , alors sa courbe admet deux demi tangentes de coefficients directeurs $f'_d\,(x_0)$ et $f'_g\ (x_0)$ d'équations cartésiennes respectives

$$\boldsymbol{(T_g)\ : y = f_g'(x_0)\ (x - x_0) + f(x_0).}$$
$$\boldsymbol{(T_d)\ : y = f_d'(x_0)\ (x - x_0) + f(x_0).}$$



- Si f n'est pas dérivable au point d'abscisse x_0, alors (C) admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des ordonnées (tangente verticale).

2) APPROXIMATION AFFINE D'UNE FONCTION

f étant une fonction numérique dérivable en $\boldsymbol{x_0}$, la fonction affine tangente à f en $\boldsymbol{x_0}$,h , est la meilleure approximation affine de f au voisinage de $\boldsymbol{x_0}$. En d'autres termes, h est définie par

$$\boldsymbol{h(x_0) = f(x_0)} \quad \textbf{et} \quad \boldsymbol{h(x) = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)}.$$

EXERCICE D'APPLICATION

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2-2x-2}{x+1}$
Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en $x = 3$

LEÇON 4 : Sens de variation *Durée : 50minutes*

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES :

A la fin de cette leçon ; l'élève doit être capable de :

-déterminer le sens de variation d'une fonction ;

-dresser le tableau de variation d'une fonction ;

-déterminer les extrema d'une fonction.

MOTIVATION :

Certaines grandeurs telles le coût de production d'un bien matériel, la balance commerciale d'un pays sont exprimées par des fonctions. La connaissance de leur sens de variation permet de prévoir l'évolution de ces grandeurs en croissance, décroissance ou constance. Cette leçon nous permettra de savoir comment étudier une fonction usuelle.

CONTROLE DES PRE REQUIS :

1) Soit f une fonction croissante sur $[2; 9]$, comparer $f(3)$ et $f(6)$.

2) Soit f une fonction décroissante sur $[2; 9]$, comparer $f(3)$ et $f(6)$.

3) Soit f une fonction constante sur $[2; 9]$, comparer $f(3)$ et $f(6)$.

4) Calculer la dérivée de $f(x) = 3x^2 - 5x + 5$ et étudier son signe.

SITUATION PROBLEME :

Le service comptable d'une entreprise de fabrication de jouets utilise une estimation du coût de production en centaines de francs de x jouets par l'expression $f(x) = x^2 + 4x$. Comment varit ce coût lorsque le nombre de jouets fabriqués augmente?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE 1:

Soit une fonction f numérique à variable réelle dérivable sur un ensemble K. x_0 et x deux éléments quelconques d'un intervalle I inclus dans K.

1) On suppose que f est croissante sur I et que $x < x_0$

a/Comparer $f(x)$ et $f(x_0)$ puis donner le signe du quotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

b/ En déduire le signe de $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

2) On suppose que f est décroissante sur I et que $x < x_0$

a/Comparer $f(x)$ et $f(x_0)$ puis donner le signe du quotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

b/ En déduire le signe de $f\,'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

3) On suppose que f est constante sur I et que $x < x_0$

a/Comparer $f(x)$ et $f(x_0)$ puis donner le signe du quotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

b/ En déduire le signe de $f\,'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

SOLUTION :

1)$a/$ $f(x) < f(x_0)$ car f croissante sur I et $x < x_0$, d'où $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$ car $f(x) - f(x_0) < 0$ et $x - x_0 < 0$.

b/$f\,'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$ car $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$ pour tout x et x_0 de I.

2) $a/f(x) > f(x_0)$ car f décroissante sur I et $x < x_0$, d'où $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0$ car $f(x) - f(x_0) > 0$ et $x - x_0 < 0$.

b/ $f\,'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0$ car $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0$ pour tout x et x_0 de I.

3)$a/$ $f(x) = f(x_0)$ car f constante sur I et x $< x_0$, d'où $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$ car $f(x) - f(x_0) = 0$ et $x - x_0 < 0$.

b/ $f\,'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$ car $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$ pour tout x et x_0 de I.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE 2:

Soit la fonction $\boldsymbol{g}$ définie par $\boldsymbol{g}\,(\boldsymbol{x})$ = $\boldsymbol{x^2 + 4x}$

1/ Déterminer le domaine de définition de $\boldsymbol{g}$;

2/Déterminer les limites aux bornes de ce domaine ;

3/Calculer la dérivée $\boldsymbol{g'(x)}$ pour tout réel $\boldsymbol{x}$ de ce domaine

4/Etudier le signe de $\boldsymbol{g'(x)}$ suivant les valeurs de $\boldsymbol{x}$.

5/ Déduire les intervalles sur lesquels $\boldsymbol{g}$ est croissante ou décroissante. Les valeurs de $\boldsymbol{g(x)}$ augmentent 'elles lorsque x augmente sur $]\boldsymbol{0}; +\boldsymbol{\infty}[$?

6/ dresser le tableau de variation de $\boldsymbol{g}$.

SOLUTION :

1/ Le domaine de g est $\mathbb{R}$.

2/ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

3/ g est dérivable comme fonction polynôme et on a : $g'(x) = 2x + 4$ pour tout réel x ;

4/

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$4x+4$		$-$	0	$+$	

D'où pour tout $\in]-\infty\,;\,-2]$, $g'(x) \leq 0$; g y est donc décroissante ;

pour $x \in$[-2 ; +∞[, $g'(x) \geq 0$; g y est donc croissante

Puisque $]0;+\infty[$ est inclus dans [-2 ; +∞[et que g y est croissante, alors les valeurs de $g(x)$ augmentent quand celles de x augmentent aussi.

5/ Tableau de variation :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

RESUME :

1) SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION :

Soit f une fonction numérique dérivable sur un ensemble K, J un intervalle de K

f est croissante sur I si pour tout réel x de I, $f'(x) > 0$

f est décroissante sur I si pour tout réel x de I, $f'(x) < 0$

f est constante sur I si pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$

2) TABLEAU DE VARIATION D'UNE FONCTION :

C'est un tableau qui indique :

-le domaine de définition d'une fonction ;

-le signe de la dérivée de cette fonction ;

-le sens de variation de cette fonction ;

-les limites aux bornes de son domaine.

x	domaine de définition et les valeurs qui annulent la fonction dérivée f'(x)
f'(x)	Signe de la fonction dérivée f'(x)
f(x)	les limites de la fonction, les extremums, les flèches représentant le sens de variation de f dans chaque intervalle.

EXEMPLE :

Compléter le signe de la fonction dérivée de f dans le tableau suivant et donner les limites aux bornes de son domaine de définition

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0		$\|\|$	$-$	0		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

SOLUTION :

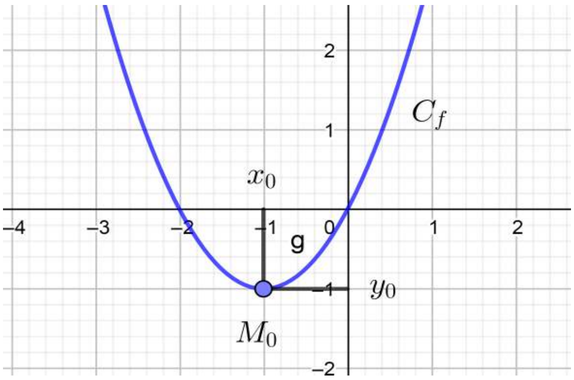
Le domaine définition est$]-\infty$; -2[∪]-2 ; +∞[
Sur les intervalles$]-\infty$; -3] et [-1 ; +∞[, f' est positive et f est croissante
Sur les intervalles$]-2$; -1] et [-3 ; -2[, f' est négative et f est décroissante
f' s'annule en -3 et -1

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) =- \infty$ et $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$

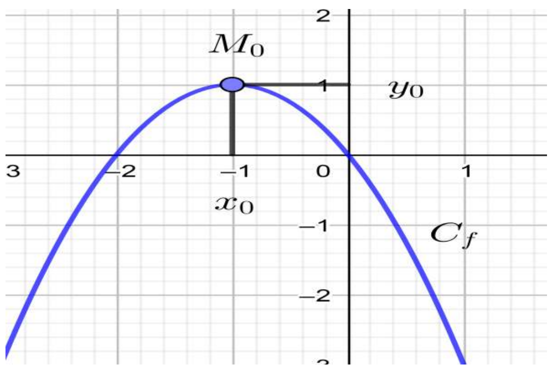
$\lim_{n\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3) EXTREMA D'UNE FONCTION

Soit f une fonction numérique dérivable sur un ensemble K ,x_0 un réel de K.f admet au pointM_0 d'abscisse $x_0$un extremum relatif si $f\,'(x_0) = 0$ et f change de sens de variation en x_0.Il existe deux types d'extrema : maximum relatif et minimum relatif.



y_0 est le minimum relatif atteint en x_0



y_0 est le maximum relatif atteint en x_0

Dans les deux cas $f\,'(x_0) = 0$

EXERCICE D'APPLICATION

1) Dresser le tableau de variation des fonctions définies par

$$f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4 \quad ; \quad g(x) = \frac{2x+3}{x-1} \;; \quad h(x) = \frac{x^2-x+1}{x+2}$$

2) Pour chacune d'elles donner si possible les extrema et les valeurs en lesquels ils sont atteints

LEÇON 5: Représentation graphique d'une fonction *Durée : 100 minutes*

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES :

A la fin de cette leçon, l'élève devra être capable de :

- Déterminer par leurs équations les asymptotes parallèles aux axes, à une courbe d'une fonction numérique
-Montrer qu'une droite donnée est asymptote oblique à la courbe d'une fonction ;
-Etudier et représenter graphiquement les fonctions homographiques, polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
-Etudier et représenter graphiquement les fonctions du type $x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{ex+d}$

MOTIVATION :

La prévision à long terme ou de façon ponctuelle nécessite des outils d'analyse dans le cas de certains phénomènes dont l'évolution est assimilable à une fonction. Dans cette leçon nous verrons l'interprétation des asymptotes qui caractérisent le comportement de la courbe d'une fonction à l'infini ou en un réel et leurs rôles dans sa représentation graphique.

CONTROLE DES PRE REQUIS :

Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{-3x^2+2x+7}{x-1}$, calculer ses limites aux bornes de son domaine.
Etudier le sens de variation de la fonction g définie ci-dessus.
Déterminer les réels a, b et c tels que $g(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$

SITUATION PROBLEME :

Soit la fonction f définie par $(x) = \frac{x^2+3x+3}{x+2}$, Comment se comporte la courbe représentative de cette fonction au voisinage de -2, +∞ et -∞ ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2-2x-2}{x+1}$ et (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (o,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$)

1) Déterminer le domaine de définition Df de f.
2) Calculer les limites aux bornes de Df .
3) Montrer que pour tout x de Df , $f(x) = x$-3+ $\frac{1}{x+1}$.

4.a) Montrer que $\lim_{x\mapsto+\infty}[f(x) - (x-3)]$ =0 , interpréter graphiquement .
b) Montrer que $\lim_{x\mapsto-\infty}[f(x) - (x-3)]$ =0 , interpréter graphiquement .
c) Interpréter graphiquement les limites $\lim_{x\to-1^-} f(x)$= -∞ et $\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$.

5.a)Calculer la dérivée $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f ;
b) Dresser le tableau de variation de f.

6.Tracer la courbe représentative de f.

SOLUTION :

1- Domaine de définition : $Df = \mathbb{R}/\{-1\}$ =]-∞ ;-1[∪]-1 ;+∞[

2- Limites

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$= -∞ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to-1} x^2-2x-2=1\\ \lim_{x\to-1} x+1 \quad\quad\quad = 0\end{cases}$ Ainsi $\lim\limits_{x\to-1^<} f(x)$ = -∞ et $\lim\limits_{x\to-1^>} f(x) = +\infty$

3-Par division euclidienne, pour tout x de Df , $f(x) = x$-3+ $\frac{1}{x+1}$

4.a) $\lim_{x\mapsto+\infty}[f(x)-(x-3)]$ =$\lim_{x\mapsto+\infty}[x-3+\frac{1}{x+1}-(x-3)]$ =$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{1}{x+1}$=0

La courbe de f et la droite (D) d'équation $y = x-3$ sont très proches quand x tend vers + ∞, on dit que (D) est asymptote oblique à la courbe de f en +∞.

b)$\lim_{x\mapsto-\infty}[f(x)-(x-3)]$ =$\lim_{x\mapsto-\infty}[x-3+\frac{1}{x+1}-(x-3)]$ =$\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{1}{x+1}$=0

La courbe de f et la droite (D) d'équation $y = x-3$ sont très proches quand x tend vers -∞, on dit que (D) est asymptote oblique à la courbe de f en -∞.

c) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$ = -∞ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$=+ ∞ signifient qu'au voisinage de -1 , La courbe de f et la droite (L) d'équation $x = -1$ sont très proches.

5.a) Dérivée et sens de variation

Pour tout $x \in \mathbb{R}/\{-1\}$, f est dérivable et $f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}/\{-1\}$, $f'(x) = 0$ alors $x = 0$ ou $x = -2$;

Table de signe de la fonction dérivée :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Alors :

Pour tout x ∈]-∞ ;-2[∪]0 ;+∞[, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante ;

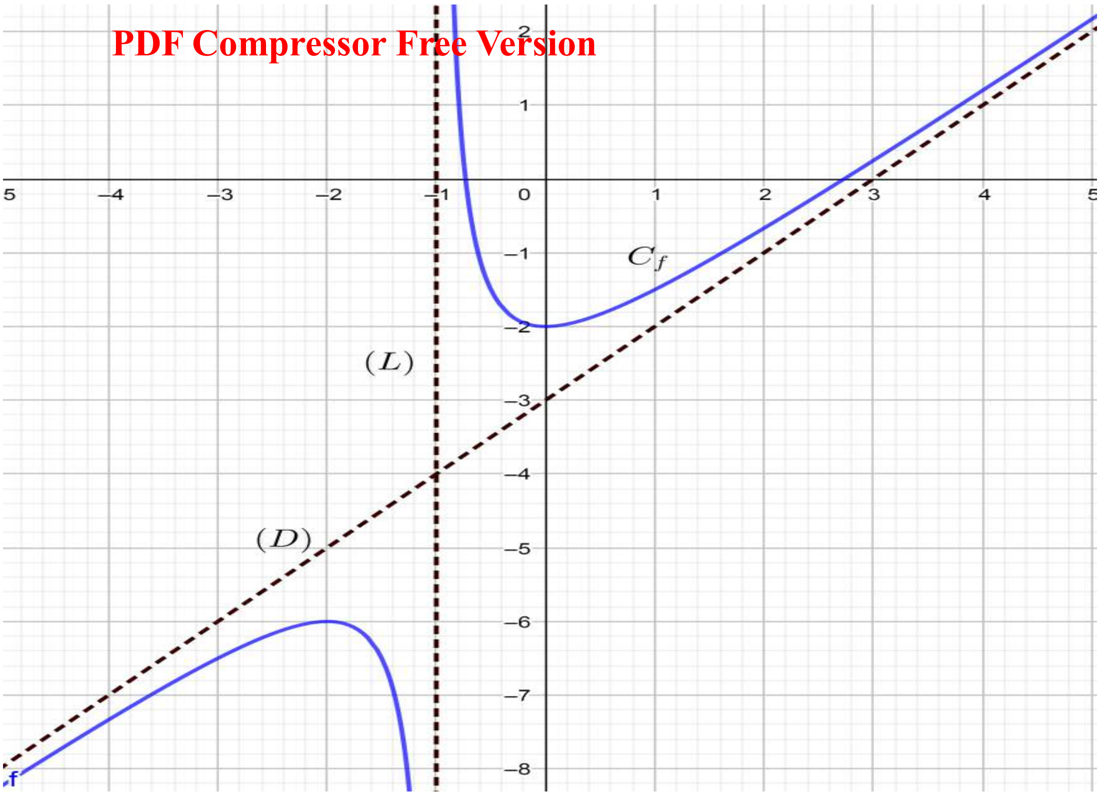
Pour tout x ∈]-2 ;-1[∪]-1 ;0[, $f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante ;

Pour tout x ∈ {-2 ;0}, $f'(x) = 0$ alors la fonction f est constante

b) Tableau de variation

x	$-\infty$		-2		-1		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-6	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

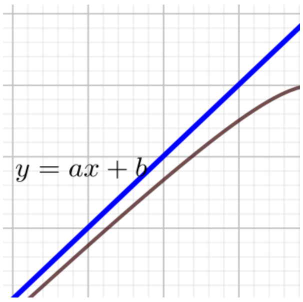
6. Courbe représentative de f



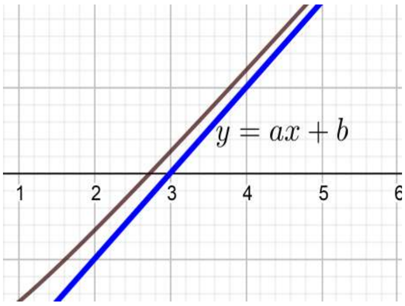
RESUME :

1) **ASYMPTOTE OBLIQUE :**

Si $\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=0$ alors la droite d'équation $y=ax+b$ est asymptote oblique à la courbe de f en $\pm\infty$.

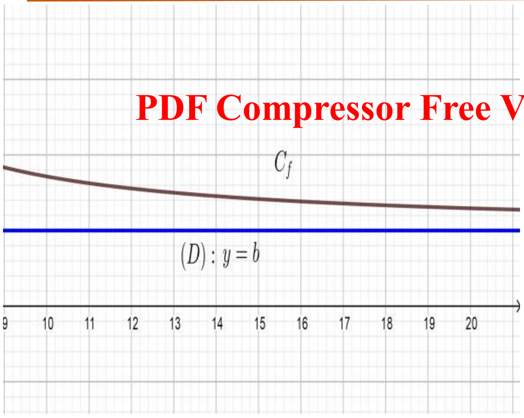


ou

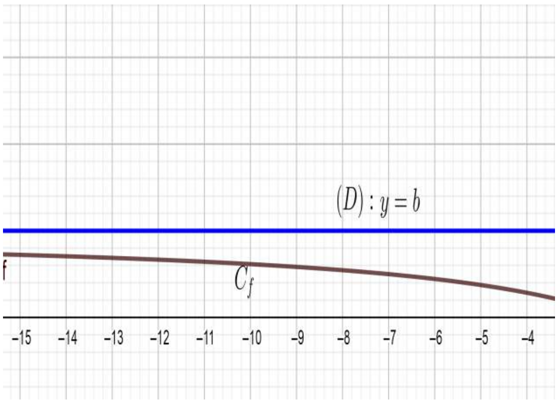


2) **ASYMPTOTE HORIZONTALE :**

Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$, alors la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $\pm\infty$.

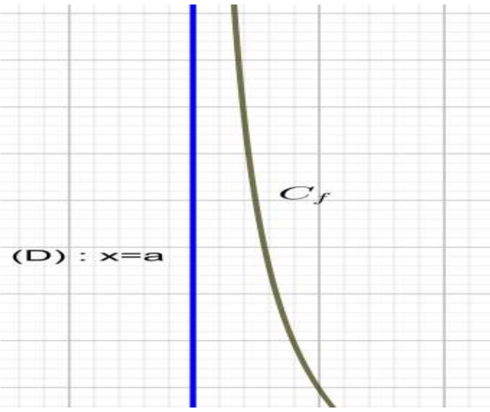


ou

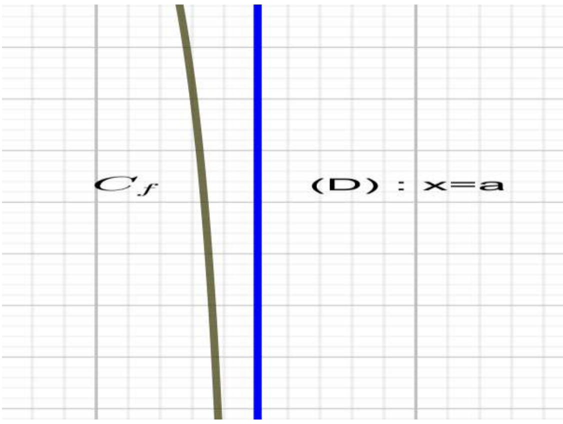


3) ASYMPTOTE VERTICALE :

Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe de f.



ou



REMARQUE :

Le point d'intersection de tous les asymptotes lorsqu'elles existent est le centre de symétrie de la courbe de cette fonction.

4) ETAPES DE L'ETUDE D'UNE FONCTION POLYNOME OU RATIONNELLE :

a) déterminer le domaine de définition
b) déterminer les limites aux bornes du domaine de définition ;
c) déterminer ou justifier l'existence des asymptotes ;
d) déterminer le sens de variation et dresser le tableau de variation ;
e) déterminer ou justifier l'existence des éléments de symétries ;
f) déterminer l'équation de certaines tangentes :
g) déterminer les points de rencontre avec les axes et dresser une table des valeurs :
h) tracer soigneusement la courbe.

EXERCICES D'APPLICATIONS ET DEVOIRS:

EXERCICE 1 :

On considère la fonction $h$définie par $h(x) = -x + 1 + \frac{1}{x}$

1) Calculer ses limites aux bornes du domaine de h.
2) Soit (D) la droite d'équation $y = -x + 1$.
   a/Etudier la position relative de (C_h) et (D)
   b/Montrer que (D) est asymptote oblique à la courbe de h.
   c/ Justifier que la droite (L) d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe de h.
   d/ Montrer que le point d'intersection de (D) et (L) est le centre de symétrie de la courbe de h.
3) Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C_h) au point d'abscisse 2.
4) Etudier le sens de variation de h.
5) Dresser le tableau de variation de h.
6) Tracer (D) , (T) , (L) et la courbe de h dans un repère orthonormé.

EXERCICE 2 :

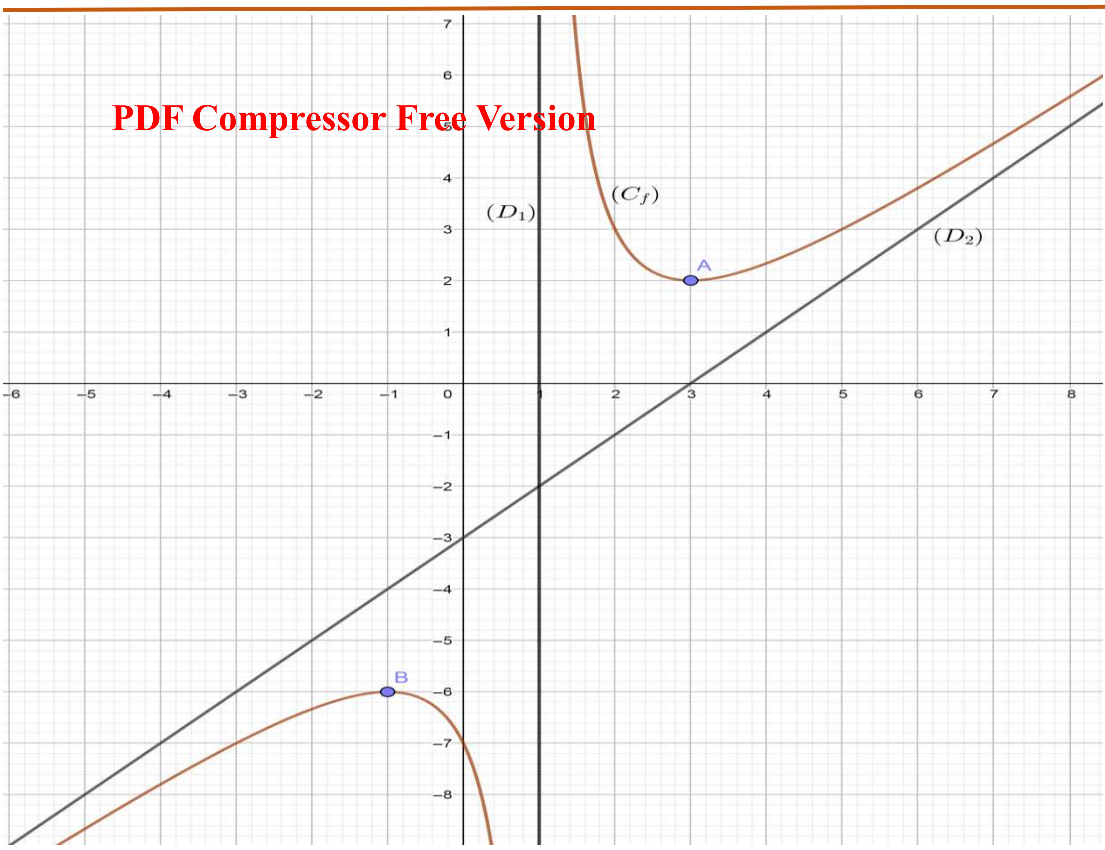
Le tableau de variation incomplet ci-dessous est celui d'une fonction f

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		+			||		-			
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	1	↗	$+\infty$

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3) Déterminer l'équation de l'asymptote verticale à la courbe de f.
4) Compléter le signe de $f'(x)$.
5) Dresser le tableau de variation de la fonction t définie par $t(x) = -f(x)$.
6) On suppose que $f(x) = ax + \mathrm{b} + \frac{c}{x+2}$
   i/ Déterminer $f'(-3)$; $f(-1)$ et $f(-3)$.
   ii/ En déduire les valeurs de a, b et c.
   iii/ Calculer $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x+1)]$ et en déduire l'équation de l'asymptote oblique à la courbe de f.
7) Tracer les courbes de f et de t dans un repère orthonormé.

EXERCICE 3 :

le graphe $(\boldsymbol{Cf}.)$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction $\boldsymbol{f}$.



1- Donner le domaine de définition de la fonction f.

2- a)Déterminer graphiquement les limites de f quand: x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$; en 1 (à gauche et à droite).

b) Résoudre graphiquement les équations suivantes $f'(x) = 0$; $f(x) = 0$; $f(x) = 3$.

c)Résoudre graphiquement les inéquations suivantes : $f'(x) \geq 0$; $f(x) \geq 0$.

3- a) Dresser le tableau de variation de .

b) Donner les différentes asymptotes à (Cf),on donnera une équation cartésienne de chacune d'elles.

c)Donner l'expression $f(x)$ de f sachant qu'elle est sous la forme $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{x+c}$.

CHAPITRE : SUITES NUMERIQUES

MOTIVATION :

Certaines circonstances de vie présentent des situations qui dépendent des nombres réels, qui évoluent suivant un taux constant ; des phénomènes ou des objets dont la position varie selon une séquence déterminée. La résolution de ces préoccupations passe pour la plupart par le calcul de proche en proche, des termes de ces séquences. Ce cours donne les outils pour pouvoir le faire.

LEÇON 1: GENERALITES SUR LES SUITES NUMERIQUES

DUREE : 200 Minutes

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

- Reconnaitre une suite numérique et calculer ses termes
- Déterminer la limite d'une suite numérique
- Etudier la monotonie d'une suite numérique
- Représenter les termes d'une suite numérique dans un repère

PRE-REQUIS :

On donne $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$. Calcule $f(2); f(5)$; $f(x+1)$. Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ puis étudies les variations de f sur $[0; +\infty[$

SITUATION PROBLEME :

Gervais lance une balle jusqu'à une hauteur de 20m. Après chaque rebond, elle perd le $\frac{1}{4}$ de sa hauteur. Passant par-là, son petit-frère lui dit en souriant qu'après le cinquième rebond, le ballon ne pourra plus s'élever de 30cm. A t-il raison ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Considérons l'application U qui à tout nombre entier n associe U_n la hauteur après le n-ième rebond. On suppose $U_0 = 20$.

1. Exprime U_1 en fonction de U_0 puis calcule la hauteur après le premier rebond
2. Exprime U_2 en fonction de U_1 puis calcule la hauteur après le deuxième rebond
3. Exprime U_3 en fonction de U_2 puis calcule la hauteur après le premier rebond. Fais de même pour calculer U_4et U_5
4. Le ballon pourrait-il s'élever de 30cm ?
5. Donne une expression générale de U_{n+1} en fonction de U_n

RESUME :

1- DÉFINITION:

On appelle suite numérique toute fonction U de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie I de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.

2- NOTATION ET VOCABULAIRE

Soit I une partie de $\mathbb{R}$ et U une suite numérique. On notera $(U_n)_{n\in I}$ ou (U_n) ou tout simplement U.

U_p se lit « U indice p » ; c'est le terme d'indice p.

U_n est le terme général de la suite

Le premier terme de la suite (U_n) est le terme U_{n_0} obtenue pour la plus petite valeur n_0 de I.

3- FORMULE EXPLICITE, FORMULE DE RÉCURRENCE

DÉFINITION 1: formule explicite

Une suite $(U_n)_{n\in I}$ dont le terme général U_n est fonction de n (U_n =f(n)) où f est une fonction numérique de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est une suite définie par une formule explicite.

EXEMPLE: $U_n = 7n + 12$

DEFINITION 2: formule de récurrence

Une suite $(U_n)_{n\in I}$ dont le premier terme U_{n_0} est connu, et chaque terme est fonction du précédent U_{n+1} =f(U_n) où f est une fonction numérique de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est dite suite définie par une formule de récurrence.

EXEMPLE: La suite U définie par $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = -2U_n + 8 \end{cases}$. Ici, U_{n+1} =f(U_n) avec $f(x) = -2x + 8$

NB: On peut passer d'une forme à l'autre, mais le travail n'est pas toujours aisé.

EXERCICE D'APPLICATION

Monsieur Hamidou grand cultivateur de la ville de Tokombéré décide d'ouvrir une boutique de vente de mil pour la nouvelle saison des récoltes. Il dispose déjà de 12 sacs de mil, et chaque semaine il en stocke 5 de plus. Parmi les 12 sacs initiaux, trois (3) sont attaqués par des charançons. Hamidou constate que le nombre de sacs attaqués est le double de la semaine précédente.

1- Recopies et complète.

Semaine	0	1	2	3
Nombre total de sacs dans le magasin				
Nombre total de sacs attaqués par les charançons dans le magasin				

2- On note U_n le nombre de sacs de mil contenus dans le magasin à la n-ième semaine ; et W_n nombre total de sacs attaqués par les charançons dans le magasin à la n-ième semaine

a) A quel ensemble appartient n ?

b) Exprime U_n en fonction de n.

3- a) Que représente W_{n+1} ?

b) Donne une relation entre W_n et W_{n+1}.

RESOLUTION :

1)

Semaine	0	1	2	3
Nombre total de sacs dans le magasin	12	17	22	27
Nombre total de sacs attaqués par les charançons dans le magasin	3	6	12	24

2) a) $n \in \mathbb{N}$ b) $U_n = 12 + 5n$

On dira ici que $U_0 = 12$; $U_1 = 17; ...$

3) a)W_{n+1} représente le nombre de sacs de mils à la semaine de rang $n + 1$

b) $W_{n+1} = 2W_n$. On dira ici que $W_{0+1} = 2W_0$ donc $W_1 = 2W_0$;

De même $W_{2+1} = 2W_2$ donc $W_3 = 2W_2$ …

4- LIMITE D'UNE SUITE DEFINIE PAR UNE FORMULE EXPLICITE

Si (U_n)est une suite définie par $U_n = f(n)$ où f est une fonction numérique, et si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = l$

EXEMPLE:

On donne la suite U définie par. $U_n = \frac{3n+5}{n+1}$. On a $f(x) = \frac{3x+5}{x+1}$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$ alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = 3$

5- ETUDE DE LA MONOTONIE (VARIATIONS):

PROPRIÉTÉ 1:

Soit $(U_n)_{n\in I}$ une suite numérique. Une suite croissante ou décroissante est dite monotone.

La suite (U_n) est dite croissante si pour tout $n \in I$, $U_{n+1} \geq U_n$

La suite (U_n) est dite décroissante si pour tout $n \in I$, $U_{n+1} \leq U_n$

La suite (U_n) est dite constante si pour tout $n \in I$, $U_{n+1} = U_n$

PROPRIÉTÉ 2:

Si (U_n) est définie pour tout entier naturel n par la formule explicite $U_n = f(n)$, où f alors (U_n) et f ont les mêmes variations sur $[0; +\infty[$

PROPRIÉTÉ 3:

Soit (U_n) une suite à termes strictement positifs alors :

- Si $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$ alors la suite est croissante ;
- Si $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$, alors la suite est décroissante ;
- Si $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$ alors la suite est constante
- Si $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ dépend des valeurs de n, alors la suite n'est pas monotone

EXERCICE D'APPLICATION :

Montrez que la suite(U_n), définie pour tout naturel n par $U_n = \frac{1}{n+2}$ est strictement décroissante.

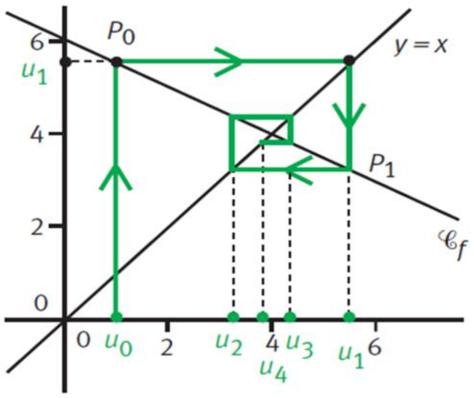
6- REPRESENTATION DANS UN REPERE

ACTIVITÉ:

Nous désirons représenter une suite(U_n), dont le terme général vérifie la relation de récurrence $U_{n+1} = 6 - 0.5U_n$, l'idée est alors de placer les termes successifs U_0 ; U_1 ; U_2… de la suite sur l'axe des abscisses.

1) Représente la courbe de la fonction affine f définie par $f(x) = 6 - 0.5x$ ainsi que la droite (Δ)d'équation $y = x$ (première bissectrice).
2) Place U_0 sur l'axe des abscisses, puis construis alors le point P_0 de C_f dont l'abscisse vaut U_0. Par construction, P_0 a donc pour ordonnée $f(U_0)$, c'est-à-dire U_1 .
3) Utilise la droite (Δ) d'équation y = x pour replacer l'image U_1 sur la droite des abscisses, puis construis l'image de ce nouveau terme U_1 . Ainsi de suite.

RESOLUTION :



RESUME :

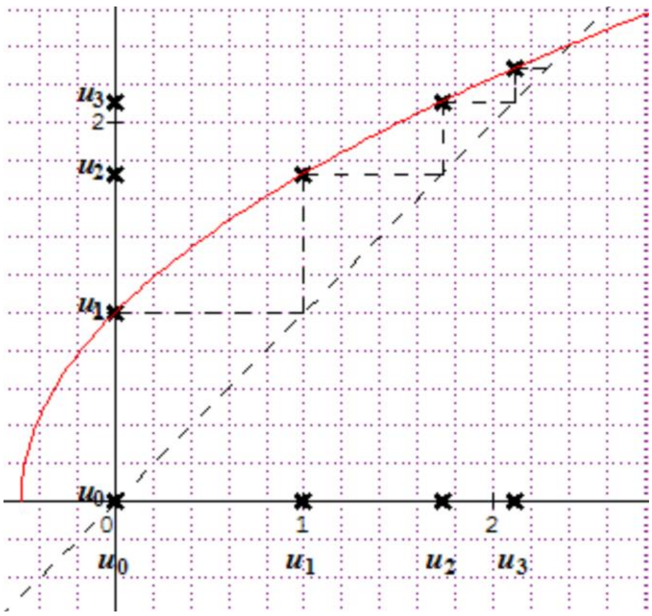
Pour représenter graphiquement une suite dont le terme général vérifie la relation de récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$, nous représentons la fonction f ; puis il suffit de représenter l'image du premier terme et ensuite d'utiliser la droite d'équation $y = x$ pour replacer l'image sur la droite des abscisses, puis de tracer l'image de ce nouveau terme. Ainsi de suite ...

EXEMPLE:

On note $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{2U_n + 1}$. Représente ses quatre premiers termes dans un repère orthonormé

RESOLUTION :

On commence par étudier la fonction $f(x) = \sqrt{2x + 1}$ avec précision dans un repère orthonormé, puis la droite d'équation $y = x$; et on représente de proche en proche les termes de U.



LEÇON 2: SUITES ARITHMETIQUES, SUITES GEOMETRIQUES

DUREE : 150 Minutes

MOTIVATION :

Dans la vie, nous sommes souvent amenés à étudier, des phénomènes qui varient de façon régulière dans le temps et l'espace, soit par ajout ou multiplication par une quantité fixe. Nous pouvons donc rencontrer des difficultés dans l'analyse de ce type de situations. Ce cours donne les outils pour pouvoir les résoudre.

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

- Reconnaitre et calculer des termes quelconques de suites arithmétiques ou géométriques.
- Calculer la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.

PRE-REQUIS :

On donne $U_n = 5n + 7$. Détermine U_{n+1} ; $U_{n+1} - U_n$; $\frac{U_{n+1}}{U_n}$

SITUATION PROBLEME :

Une entreprise, propose pour recruter un nouvel employé deux types de rémunération :

Type 1 : Salaire initial de 1 20000Francs par mois avec augmentation annuelle du salaire mensuel de 10000Francs.

Type 2 : Salaire initial de 1 10000Francx par mois avec augmentation annuelle du salaire mensuel de 8%.

Le nouvel employé compte rester 5 ans dans l'entreprise. Quelle est la rémunération la plus avantageuse ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

1. Soit U_0 le salaire mensuel pour au cours de la première année, selon la rémunération de type 1. On pose r=10000
   a) Quelle est la relation entre U_0 et U_1 et r?
   b) Quelle est la relation entre U_1 , U_2 et r? Déduis-en la relation entre U_0 , U_2 et r?
   c) Donne une conjecture de la relation liant U_0 , U_n et r? Déduis-en le salaire au bout de la cinquième année.
   d) Quelle est la masse salariale pendant ces 5 ans ?

2. Soit V_0 le salaire mensuel pour au cours de la première année, selon la rémunération de type 2. On pose q=1,08
   a) Quelle est la relation entre V_0 et V_1 et q?
   b) Quelle est la relation entre V_1 , V_2 et q? Déduis-en la relation entre V_0 , V_2 et q?
   c) Donne une conjecture de la relation liant V_0 , V_n et q. Déduis-en le salaire au bout de la cinquième année.
   d) Quelle est la masse salariale pendant ces 5 ans ?
3. Quelle est la rémunération la plus avantageuse ?

RESOLUTION :

1.a) $U_1 = U_0 + 10000 = U_0 + r$

b) $U_2 = U_1 + 10000 = U_0 + 2r$

c) $U_n = U_0 + nr$. Au bout de la cinquième année $U_4 = U_0 + 4r = 120000 + 40000 = 160000$

d) La masse salariale est $S = 12(U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4) = 12(5U_0 + r + 2r + 3r + 4r)$

$$= 12(5U_0 + r(1 + 2 + 3 + 4)) = 13800000$$

2.a) $V_1 = V_0 + 0{,}08V_0 = 1{,}08V_0 = V_0q$

b) $V_2 = V_1 + 0{,}08V_1 = 1{,}08V_1 = V_1q = V_0q^2$

c) $V_n = V_0q^n$. Au bout de la cinquième année $V_4 = V_0q^4 = 110000(1{,}08)^4$

d) La masse salariale est :

$S = 12(V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4)$

$= 12(V_0(1 + q + q^2 + q^3 + q^4))$

$= 14448192$

3. La plus avantageuse est le type 2

RESUME :

1- SUITES ARITHMETIQUES:

DÉFINITION:

Une suite de terme général $(U_n)_{n\in I}$ sera dite arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que pour tout $n \in I$, $U_{n+1} - U_n = r$. r est appelé la raison de la suite (U_n).

PROPRIÉTÉ 1:

- Soit $(U_n)_{n\in I}$ une suite arithmétique ; U_p un terme de la suite, r la raison, alors pour

tout $n \in I$ $U_n = U_p + (n-p)r$. En particulier, si U_0 est le premier alors $U_n = U_0 + nr$.

- Si $S_n = U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n$ alors $S_n = \frac{(n-p+1)(U_n+U_p)}{2}$ en particulier

$S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ alors $S_n = \frac{(n+1)(U_0+U_p)}{2}$

PROPRIÉTÉ 2: Monotonie

Soit la suite (U_n) arithmétique de raison.

- Si $r < 0$, alors la suite (U_n) est décroissante.
- Si $r > 0$, alors la suite (U_n) est croissante.
- Si $r = 0$ alors (U_n) est constante.

EXEMPLE :

On considère la suite (U_n) définie par $U_n = \frac{2n+1}{3}$

1. Calculer $U_0;\ U_1;\ U_2$
2. Démontrer que la suite (U_n) est une suite arithmétique puis exprimer U_n en fonction de n
3. Calculer $S_{10} = U_0 + U_1 + \cdots + U_{10}$
4. Etudie la monotonie de la suite (U_n)

2- SUITES GEOMETRIQUES:

DÉFINITION:

Une suite de terme général $(V_n)_{n\in I}$ sera dite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que pour tout $n \in I$, $V_{n+1} = qV_n$. q est appelé la raison de la suite (V_n)
raison de la suite.

PROPRIÉTÉ 1:

- Soit $(V_n)_{n\in I}$ une suite arithmétique ; V_p un terme de la suite, r la raison, alors pour tout $n \in I$ $V_n = V_p q^{n-p}$. En particulier, si V_0 est le premier alors $V_n = V_0 q^n$.

- Si $S_n = V_p + V_{p+1} + \cdots + V_n$ alors $S_n = V_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ en particulier

$S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$ alors $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

PROPRIÉTÉ 2: : Monotonie

Soit la suite (V_n)géométrique de raison q et de premier terme V_0.

- Si $V_0 > 0$ et $0 < q < 1$, alors la suite (V_n) est décroissante.
- Si $V_0 > 0$ et $q > 1$, alors la suite(V_n) est croissante.
- Si $V_0 < 0$ et $0 < q < 1$, alors la suite (V_n) est croissante.
- Si $V_0 < 0$ et $q > 1$, alors la suite (V_n) est décroissante.
- Si $q < 0$, alors la suite (V_n) n'est pas monotone

EXERCICE D'APPLICATION :

On considère les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ respectivement définies par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n - 3 \end{cases}$

et $V_n = U_n - 3$

1. Calculer U_1, U_2 et U_3 .
2. Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3. Donner l'expression du terme général de V_n en fonction de n.
4. On pose $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$. Donner l'expression de S_n en fonction de n.
5. Etudie la monotonie de la suite (V_n)

MODULE N° 22 : ORGANISATION ET GESTION DES DONNÉES

CHAPITRE : SERIES STATISTIQUES REGROUPEES EN CLASSE

MOTIVATION

Les pays et les sociétés ont besoin des informations chiffrées objectives pour prendre des décisions raisonnables. Ainsi, l'organisation des données est au cœur des processus de prise de décision dans les organisations économiques, politiques et sociales désireuses de prospérer.

LEÇON I : EFFECTIFS ET FRÉQUENCES CUMULÉES CROISSANTES OU DÉCROISSANTES — DURÉE : 100 Minutes

COMPETENCE A ACQUERIR PAR LES ELEVES

L'élève doit être capable de compléter un tableau statistique par les lignes des Effectifs cumulés croissants, Effectifs cumulés décroissants, Fréquences cumulés croissantes et Fréquences cumulés décroissantes.

SITUATION PROBLEME

Les moyennes sur 20 des 60 élèves d'une classe de première D, à la fin du troisième trimestre ont été consignées dans le tableau ci-dessous :

11	**15**	**6**	**12**	**10**	**15**	**16**	**10**	**16**	**10**	**10**	**15**	**11**	**6**	**12**
5	**7**	**7**	**11**	**15**	**13**	**11**	**10**	**7**	**8**	**10**	**13**	**11**	**11**	**8**
8	**15**	**15**	**13**	**14**	**17**	**5**	**6**	**5**	**9**	**13**	**5**	**9**	**8**	**4**
13	**12**	**4**	**9**	**9**	**8**	**10**	**17**	**10**	**12**	**13**	**12**	**10**	**10**	**14**

Ces moyennes sont classées en quatre catégories à savoir :
- Mention faible pour ceux dont la moyenne est comprise entre 0 et 8(8 exclu),
- mention insuffisante pour les moyennes comprises entre 8 et 10 (10 exclu),
- mention encouragement pour les moyennes comprises entre 10 et 14 (14 exclu),
- mention félicitation pour les moyennes comprise entre 14 et 20 (20 exclu).

Au terme de ce classement, le professeur principal affirme que 33.33% des élèves ont eu la moyenne. A-t-il raison? Justifier votre réponse.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

En vous servant du tableau des valeurs de la situation problème, répondez aux questions suivantes :

1. déterminer le nombre d'élèves ayant eu une moyenne comprise entre 3 et 8, avec 8 inclus.
2. compléter le tableau suivant :

Intervalles de notes	[0;8[	[8;10[	[10;14[	[14;20[
Nombre d'élèves				

3. Que constate-t-on en additionnant tous les nombres de la deuxième ligne?
4. Calculer le pourcentage des élèves ayant moins de 10/20.

SOLUTION DE L'ACTIVITÉ

1. En regroupant les différents éléments du tableau, on obtient :

Moyennes des élèves	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Nombre d'élèves	2	4	3	3	5	4	10	6	5	6	2	6	2	2

Ainsi, on trouve que 17 élèves ont une moyennes comprise entre 3 et 8, avec 8 inclus.

2. En complétant le tableau, on obtient le nouveau tableau suivant :

Intervalles de notes	[0;8[	[8;10[	[10;14[	[14;20[
Nombre d'élèves	12	9	27	12

3. En additionnant tous les nombres de la deuxième ligne, on trouve 60 qui représente l'effectif total de la classe de première *D*.
4. Sur les 60 élèves de cette classe, 21 ont eu moins de 10/20. Ainsi, le pourcentage des élèves ayant eu moins de 10/20 est :
$f = \frac{21}{60} \times 100 = 35\%$, donc $f = 35\ \%$
5. En procédant de la même façon que dans la question 4, on se rend compte que 39 élèves sur les 60 ont eu la moyenne (notes supérieures ou égales à 10/20). Ainsi, le pourcentage des élèves ayant eu la moyenne est :
$f = \frac{39}{60} \times 100 = 65\%$. Le professeur principal n'a donc pas raison lorsqu'il affirme que 33.33% d'élève ont eu la moyenne.

RESUME

1.1 QUELQUES RAPPELS

DÉFINITION 1.1.1.

En statistique, l'ensemble sur lequel l'on travail est appelé population.

DEFINITION 1.1.2.

La particularité commune que l'on étudie sur une population donnée est appelée caractère.

♣ Les valeurs prises par le caractère étudié sont appelées modalités.
♣ Lorsque les modalités sont des intervalles de R, le caractère est quantitatif continu.
♣ Le nombre d'individus (n_k) d'une modalité est appelé effectif de cette modalité.
♣ Le nombre total N d'individus de la population est appelé effectif total.
♣ le rapport $f_k = \frac{n_k}{N}$ est appelé fréquence de la modalité k.

1.2 EFFECTIF CUMULE ET FREQUENCE CUMULEE

DEFINITION 1.2.1.

Une classe de modalités est un intervalle de la forme [a;b[avec a et b des nombres réels tels que a strictement inférieur à b.

DEFINITION 1.2.2.

L'effectif d'une classe [a;b[est le nombre d'individus de la population étudiée dont les modalités sont dans l'intervalle [a;b[.

DEFINITION 1.2.3.

La fréquence d'une classe est le quotient de son effectif n_i par l'effectif total N de la population.

nombre d'individus de la population étudiée dont les modalités sont dans l'intervalle [a;b[.

Si f_i désigne la fréquence de la classe i, alors on a :

$f_i = \frac{n_i}{N} \times 100.$

Dans ce cas, f_i est exprimée en pourcentage.

On suppose que le tableau de la série statistique est le suivant :

Modalité	$[a_0;a_1[$	$[a_1;a_2[$	....	$[a_p-1;a_p[$
Effectifs	n_1	n_2	....	n_p
Fréquences	f_1	f_2	....	f_p

1.2.1 EFFECTIF CUMULE

DEFINITION 1.2.4.

♣ On appelle effectif cumulé croissant de la modalité $[a_{k-1}; a_k[$ noté ECC, le nombre $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

♣ On appelle effectif cumulé décroissant de la modalité $[a_{k-1}; a_k[$ noté ECD, le nombre $n_k + n_{k+1} + \ldots + n_p$

REMARQUE

L'ECC de la classe $[a_{k-1}; a_k[$ est l'ECC ou du nombrea_k.

L'ECD de la classe $[a_{k-1}; a_k[$ est l'ECD du nombrea_k.

EXEMPLE

Le tableau suivant donne les ECC et ECD de la série statistique étudiée :

Intervalles de notes	[0;8[	[8;10[	[10;14[	[14;20[
Nombre d'élèves	11	9	28	12
ECC	11	20	48	60
ECD	60	49	40	12

1.2.2 FREQUENCE CUMULEE

DEFINITION 1.2.5.

♣ On appelle fréquence cumulée croissante de la modalité $[a_{k-1}; a_k[$notée FCC, le nombre $f_1 + f_2 + \ldots + f_k$.

♣ On appelle fréquence cumulée décroissante de la modalité $[a_{k-1}; a_k[$ notée FCD, le nombre $f_k + f_{k+1} + \ldots + f_p$.

REMARQUES

La FCC de la classe $[a_{k-1}; a_k[$est la FCC du nombre a_k.

La FCD de la classe $[a_{k-1}; a_k[$ est la FCD du nombre a_k.

EXEMPLE

Le tableau suivant donne les ECC et ECD de la série statistique étudiée :

Intervalles de notes	[0;8[	[8;10[	[10;14[	[14;20[
Nombre d'élèves	11	9	28	12
ECC	11	20	48	60
ECD	60	49	40	12
FCC	13.33	33.33	80	1
FCD	1	81.67	66.67	20

1.2.3 EXERCICES D'APPLICATION

Une enquête a été réalisée sur la taille des 35 élèves d'une classe de première d'un établissement scolaire. Au moment de la saisie, certaines informations ont été perdues par mauvaise manipulation mais on a pu obtenir le tableau suivant :

Tailles (cm)	[130;135[	[135;145[	[145;150[	[150;155[	[155;165[	[165;170[	[170;175[
Effectifs		4			8		
ECC	1		12	22		33	

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Tailles (cm)	[130;135[	[135;145[	[145;150[	[150;155[	[155;165[	[165;170[	[170;175[
Effectifs		4			8		2
ECC	1		12	22		22	
ECD							
Frquence							
FCC							
FCD							

En déduire le nombre d'élèves qui ont une taille supérieure ou égale à 155cm.

LEÇON II : CARACTÉRISTIQUES DE POSITION   DURÉE : 100 Minutes

COMPETENCE A ACQUERIR

Calculer la moyenne, déterminer la classe modale, le mode et la médiane d'une série regroupée en classe.

SITUATION PROBLEME

Le professeur de sport du Lycée technique de Mvengue a fait une étude sur la taille des élèves de la classe de P^{re}F à fin de pouvoir les classer par ordre croissant de leur taille au stade pendant le cours. Il a regroupé les tailles par catégorie et a obtenu le tableau suivant :

Tailles (cm)	[150;155[	[155;160[	[160;165[	[165;170[	[170;180[
Effectifs	15	7	6	20	2

Après avoir faire ce classement, il affirme que la taille moyenne de cette classe est 163.5cm. A-t-il raison? Justifier votre réponse.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

Les notes sur 20 obtenues en Mathématiques par les élèves de P^{re}F du Lycée technique de Mvengue ont permis d'obtenir la série statistique suivante :

Notes	[0;5[	[5;8[	[8;10[	[10;12[	[12;15[	[15;20[
Effectifs (n_i)	10	5	13	7	8	4

1. déterminer l'effectif total N des élèves de cette classe.
2. Quelle est la classe qui a le plus grand effectif?
3. Compléter le tableau en faisant apparaitre les centres c_i de chaque classe. En déduire le mode de cette série.
4. Calculer le rapport $\frac{n_1 \times c_1 + n_2 \times c_2 + n_3 \times c_3 + n_4 \times c_4 + n_5 \times c_5 + n_6 \times c_6}{N}$. Que représente cette valeur?

SOLUTION DE L'ACTIVITÉ

1. L'effectif total des élèves de cette classe est $N = 47$.
2. La classe ayant le plus grand effectif est : [8;10[3. Tableau faisant apparaitre la ligne des centres c_i :

Notes	[0;5[	[5;8[	[8;10[	[10;12[	[12;15[	[15;20[
Effectifs (n_i)	10	5	13	7	8	4
Centres (c_i)	2,5	6,5	9	11	13,5	17,5

—

4. Notons X ce rapport. On a :

$$\begin{aligned}\overline{X} &= \frac{n_1\times c_1+n_2\times c_2+n_3\times c_3+n_4\times c_4+n_5\times c_5+n_6\times c_6}{N}\\ &= \frac{10\times 2,5+5\times 6,5+13\times 9+7\times 11+8\times 13,5+4\times 17,5}{47}\\ &= \frac{429,5}{47}\\ &= 9,14\end{aligned}$$

La valeur obtenue représente la moyenne de la série statistique étudiée.

5. Il suffit de trouver le centre de chaque classe et ensuite trouver la taille moyenne de cette classe en procédant comme dans la question précédente. On a :

Tailles (cm)	[150;155[	[155;160[	[160;165[	[165;170[	[170;180[	Total
Effectifs (n_i)	15	7	6	20	2	50
Centres (c_i)	152,5	157,5	162,5	167,5	175	
$n_i \times c_i$	2287,5	1102,5	975	3350	350	8065

Ainsi, la taille moyenne de cette classe est : $\frac{8065}{50} = 161,3cm$.

RESUME

Soit $I = [a;b[$ une classe d'effectif n_k.

DEFINITION 1.2.6.

On appelle amplitude de I, le nombre réel A_m définit par $A_m = b - a$,

La densité de la classe I est le nombre réel d définit par, $d = \frac{n_k}{A_m}$

Le centre de la classe I est le nombre réel c définit par $c = \frac{a+b}{2}$

1.3 MOYENNE, CLASSE MODALE, MODE ET MEDIANE

1.3.1 CLASSE MODALE

DEFINITION 1.3.1.

On appelle classe modale d'une série statistique regroupée en classe, la classe qui a le plus grand effectif.

EXEMPLE

Dans la série étudiée en activité, la classe modale est la classe [8;10[.

1.3.2 MODE

DEFINITION 1.3.2.

Le mode d'une série statistique regroupée en classe, est le centre de la classe modale.

EXEMPLE

Dans la série étudiée en activité, le mode est 9.

1.3.3 MOYENNE

DEFINITION 1.3.3.

La moyenne d'une série statistique regroupée en classe, est le nombre réel noté X définit par :

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i \times c_i}{N} = \frac{n_1 \times c_1 + n_2 \times c_2 + ... + n_p \times c_p}{N} = \sum_{i=1}^{p} f_i \times n_i,$$

où $(n_i; c_i)$ est la série des centres des classes associée à la série groupée ; N l'effectif total, f_i la fréquence de la classe i,c_i le centre de la classe i et p le nombre de classes.

EXEMPLE

La moyenne de la série étudiée à l'activité est X = ...

1.3.4 MEDIANE

DEFINITION 1.3.4

. La médiane d'une série statistique regroupée en classe est le nombre M_e tel que la moitié au moins des individus ont une modalité inférieure ou égale à M_e et la moitié au moins des individus ont une modalité supérieure ou égale à M_e.

DEFINITION 1.3.5.

L'intervalle médian ou classe médiane est la classe qui contient la médiane de la série.

Détermination de la classe médiane

En utilisant le tableau des ECC, pour déterminer l'intervalle médian, il suffit de trouver la classe correspondant à la première fois ou` la valeur de l'ECC est supérieure ou égale à la moitié de l'effectif total. Exemple La classe médiane de la série étudiée à l'activité est la classe.........

Détermination de la médiane par la méthode d'interpolation linéaire

Pour déterminer la médiane par interpolation linéaire, on procède comme suit :

1. On détermine l'intervalle médian,
2. On pose $A\,(a; f(a))$,$M\left(M_e; \frac{N}{2}\right)$, $B\,(b; f(b))$ puis on calcul $\overrightarrow{AB}\,(b-a; f(b)-f(a))$ et $\overrightarrow{AM}\left(M_e - a; \frac{N}{2} - f(a)\right)$.
   $f(a)$ et $f(b)$ désignent respectivement l'ECC de a et l'ECC de b.
3. On résout ensuite l'équation $\frac{M_e - a}{\frac{N}{2} - f(a)} = \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$ d'inconnue M_e.

EXEMPLE

Déterminons la médiane de la série étudiée à l'activité.

1.3.5 EXERCICES D'APPLICATION

Une enquête sur la durée des communications passées d'une cabine téléphonique a donné les résultats suivants :

Classe	[0;1[	[1;2[	[2;3[	[3;5[	[5;10[	[10;15[
Effectifs (n_i)	30	54	51	45	43	57

1. Quelle est la classe modale de cette série statistique? Justifier votre réponse.
2. En déduire le mode de cette série statistique.
3. Compléter le tableau suivant :

Classe	[0;1[	[1;2[	[2;3[	[3;5[	[5;10[	[10;15[
Effectifs (n_i)	30	54	51	45	43	57
ECC						
ECD						
c_i						
$ni \times ci$						

4. Déterminer la durée moyenne des communications passées dans cette cabine téléphonique.
5. Calculer la moyenne des communications dont la durée est supérieure ou égale à 3.
6. En utilisant la méthode par interpolation linéaire, calculer la médiane M_e de cette série statistique.

LEÇON III : CARACTÉRISTIQUES DE DISPERSION **DURÉE : 50 Minutes**

COMPETENCE A ACQUERIR

Calculer l'écart moyenne, la variance et l'écart type d'une série regroupée en classe.

SITUATION PROBLEME

Le fondateur d'un grand établissement scolaire, dans le besoin de compléter l'effectif des élèves de la classe de $1^{re}D_{11}$ à 25 élèves pour l'année scolaire 2020/2021 lance le recrutement de d'un élève dans cette classe. Il donne l'instruction au principal que les candidats vont subir trois épreuves : Mathématiques, Français, Anglais et que le candidat retenu doit avoir la plus grande moyenne. Ngah et Fohe se sont présentés et ont obtenu les notes suivantes :

Fohe

Matières	Mathématiques	Français	Anglais
Notes/20	18	12	4
coefficient	4	3	3

Ngah

Matières	Mathématiques	Français	Anglais
Notes/20	11.25	16	9
coefficient	4	3	3

Le principal se rend compte que les deux candidats ont eu la même moyenne. Qui des deux candidats sera retenu?
Justifier votre réponse.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

Les notes d'anglais des élèves d'une classe de $1^{re}D$, reparties suivant leur performance au cours d'une évaluation, sont représentées dans le tableau ci-dessous :

Classe	[0;2[	[2;4[	[4;6[	[6;8[	[8;10[	[10;12[
Effectifs (n_i)	19	21	15	25	8	7

1. Déterminer l'effectif total N de cette série statistique.
2. compléter le tableau suivant :

Classe	[0;2[	[2;4[	[4;6[	[6;8[	[8;10[	[10;12[
Effectifs (n_i)	19	21	15	25	8	7
c_i						
$n_i \times c_i$						
$n_i \times (c_i)^2$						

3. En déduire la moyenne de cette série statistique.

4. Calculer le rapport

$$e_m = \frac{n_1|c_1 - \bar{X}| + n_2|c_2 - \bar{X}| + n_3|c_3 - \bar{X}| + n_4|c_4 - \bar{X}| + n_5|c_5 - \bar{X}| + n_6|c_6 - \bar{X}|}{N}$$

5. Calculer le rapport

$$V = \frac{n_1(c_1 - \bar{X})^2 + n_1(c_1 - \bar{X})^2 + n_1(c_1 - \bar{X})^2 + n_1(c_1 - \bar{X})^2 + n_1(c_1 - \bar{X})^2 + n_1(c_1 - \bar{X})^2}{N}$$

6. En déduire le nombre réel $\sigma = \sqrt{V}$.

SOLUTION DE L'ACTIVITÉ

1. L'effectif total est $N = 95$.
2. Complétons le tableau :

Classe	[0;2[	[2;4[	[4;6[	[6;8[	[8;10[	[10;12[
Effectifs (n_i)	19	21	15	25	8	7
c_i	1	3	5	7	9	11
$n_i \times c_i$	19	63	75	175	72	77
$n_i \times (c_i)^2$	19	189	375	1225	648	847

3. D'après le tableau de la question 2, on a : $X = \frac{19+63+75+175+72+77}{95} = \frac{481}{95} = 5,1,\quad \overline{X} = 5,1.$
4. Calculons le rapport e_m :

$$e_m = \frac{n_1|c_1 - \bar{X}| + n_2|c_2 - \bar{X}| + n_3|c_3 - \bar{X}| + n_4|c_4 - \bar{X}| + n_5|c_5 - \bar{X}| + n_6|c_6 - \bar{X}|}{N}$$
$$= \frac{19|1-5,1| + 21|3-5,1| + 15|5-5,1| + 25|7-5,1| + 8|9-5,1| + 7|11-5,1|}{95}$$
$$= \frac{243,5}{95}$$
$$= 2,56$$

Ainsi, $e_m = 2,56$

5. Calculons le rapport V :

$$V = \frac{n_1(c_1 - \bar{X})^2 + n_2(c_2 - \bar{X})^2 + n_3(c_3 - \bar{X})^2 + n_4(c_4 - \bar{X})^2 + n_5(c_5 - \bar{X})^2 + n_6(c_6 - \bar{X})^2}{N}$$
$$= \frac{19(1-5,1)^2 + 21(3-5,1)^2 + 15(5-5,1)^2 + 25(7-5,1)^2 + 8(9-5,1)^2 + 7(11-5,1)^2}{95}$$
$$= \frac{867,75}{95}$$
$$= 9,13$$

Ainsi, $V = 9,13$.

6. Déduisons le réel $\sigma = \sqrt{V}$.

On a : $\sqrt{V} = \sqrt{9,13} = 3,02$.

Donc σ = 3,02.

RESUME

1.4 ÉCART MOYEN, VARIANCE ET ÉCART TYPE

Dans cette partie, nous présentons uniquement quelques caractéristiques de dispersion autour de la moyenne. N désigne l'effectif total de la série, X sa moyenne n_i l'effectif de la classe i, c_i le centre de la classe i et p le nombre de classes.

1.4.1 ÉCART MOYEN

DEFINITION 1.4.1.

On appelle écart moyen d'une série statistique regroupée en classe, le nombre réel noté e_m définit par :

$$e_m = \frac{n_1|c_1 - \bar{X}| + n_2|c_2 - \bar{X}| + \cdots + n_p|c_p - \bar{X}|}{N}$$

EXEMPLE

L'écart moyen de la série étudiée à l'activité est $e_m = 2,56$

1.4.2 VARIANCE

DEFINITION 1.4.2

. On appelle variance d'une série statistique regroupée en classe, le nombre réel positif noté V définit par :

$$V = \frac{n_1(c_1 - \bar{X})^2 + n_1(c_1 - \bar{X})^2 + \cdots + n_p\left(c_p - \bar{X}\right)^2}{N} = \sum_{i=1}^{p} f_i(c_i - \bar{X})^2$$

.

PREUVE :

En exercice

REMARQUE 1.4.1.

Dans la pratique, le calcule de variance se fait facilement grâce à la formule suivante dite de Koenig :

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i \times c_i^2}{N} - \bar{X}^2$$

EXEMPLE

La variance de la série étudiée à l'activité est $V = 9,13$

1.4.3 ÉCART TYPE

DEFINITION 1.4.3.

L'écart type d'une série statistique regroupée en classe noté σ, est tout simplement la racine carrée de la variance : $\sigma = \sqrt{V}$

Le symbole σ se lit Sigma.

EXEMPLE

L'écart type de la série étudiée à l'activité est $\sigma = 3{,}02$

REMARQUE 1.4.2.

1. L'écart-type permet d'avoir une idée de la façon dont les valeurs de la série s'écartent par rapport à la moyenne : C'est une mesure de dispersion.
   Un écart-type faible correspond à une série dont les valeurs du caractère sont concentrées autour de la moyenne.
2. Les calculs de moyenne, de variance et d'écart-type sont, pour des séries prenant un grand nombre de valeurs, des calculs compliqués. mais ils sont facilement réalisés par des calculatrices utilisées en mode statistiques et les ordinateurs.

1.4.4 EXERCICES D'APPLICATION

Une enquête sur la durée des communications passées d'une cabine téléphonique a donné les résultats suivants :

Classe	[0;1[	[1;2[	[2;3[	[3;5[	[5;10[	[10;15[
Effectifs (n_i)	30	54	51	45	43	57

1. Déterminer la durée moyenne des communications passées dans cette cabine téléphonique.
2. Calculer l'écart type de cette série statistique.
3. Interpréter le résultat de la question 2.

LEÇON IV : REPRÉSENTATION GRAPHIQUES PAR LES HISTOGRAMMES ET LES COURBES CUMULATIVES *DURÉE : 100 Minutes*

COMPETENCE A ACQUERIR

Construire et interpréter un histogramme, construire et interpréter la courbe des effectifs ou des fréquences cumulés.

SITUATION PROBLEME

Un chef de village a mené une enquête auprès de sa population à fin d'avoir une idée sur la taille de ses habitants. Les informations recueillies auprès des habitants ont permis aux responsables chargés de mener cette enquête de dresser le tableau suivant :

Classe	[150;155[	[155;160[	[160;165[	[165;170[	[170;180[
Effectifs (n_i)	90	40	150	80	100

Le chef a rappelé aux responsables qu'il a souvent vu dans des documents des diagrammes formés des rectangles collés dans lesquels on peut trouver des informations d'une enquête et qu'il souhaiterait que les informations soient représentées sur ce type de diagramme. Aider les responsables chargés de l'enquête a réaliser ce travail.

PRE-REQUIS

Le plan est muni du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On considère les points A(7;2); B(5;20) et C(50;110).
Placer les points A, B et C dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Comment trouver graphiquement les coordonnées d'un point quelconque de ce repère?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

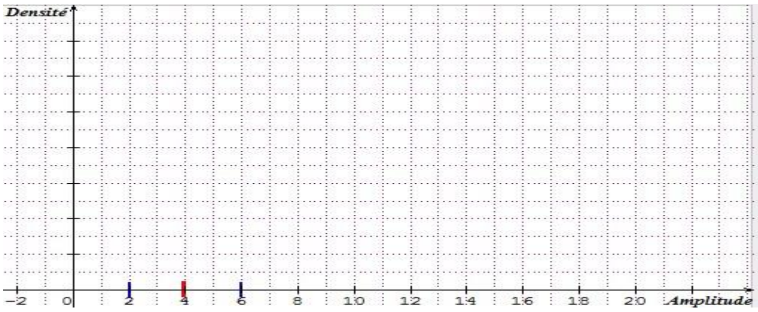
La série statistique suivante porte sur les notes de mathématiques d'une classe de 1^{re}D :

Notes	[0;8[	[8;10[	[10;14[	[14;16[	[16;20[
Effectifs (n_i)	11	9	25	5	10

1. Compléter le tableau suivant :

Notes	[0;8[	[8;10[	[10;14[	[14;16[	[16;20[
Effectifs (n_i)	11	9	25	5	10
Amplitude (A_i)					
Centre (c_i)					
densité (d_i)					
ECC					
ECD					

2. On considère le repère orthogonal suivant :



i Reproduire le repère ci-dessus.

ii Construire les rectangles collés tels que la base de chaque rectangle soit proportionnelle à l'amplitude de la classe et la hauteur proportionnelle à la densité de cette classe.

iii Dans le même repère, placer les points de coordonnées (c_i;d_i). Quel nom peut-on donner à la courbe obtenue en joignant successivement les points obtenus par des lignes?

3. i Reproduire le repère ci-dessus.

ii Pour chaque classe [a;b[, placer les points de coordonnées (b;ECC(b)). Quel nom peut-on donner à la courbe obtenue en joignant successivement les points obtenus par des ligne?

iii Dans le même repère, placer les points de coordonnées (a;ECD(a)). Quel nom peut-on donner à la courbe obtenue en joignant successivement les points obtenus par des lignes? iv Donner une valeur approchée du point d'intersection des deux courbes obtenues en (ii) et (iii). Que représente cette valeur?

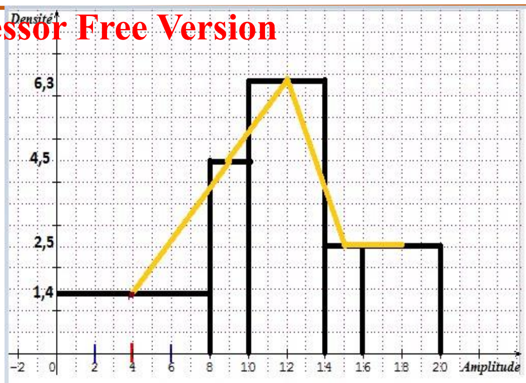
ECC(b) et ECD(a) représentent respectivement l'effectif cumulé croissant de b et l'effectif cumulé décroissant de a.

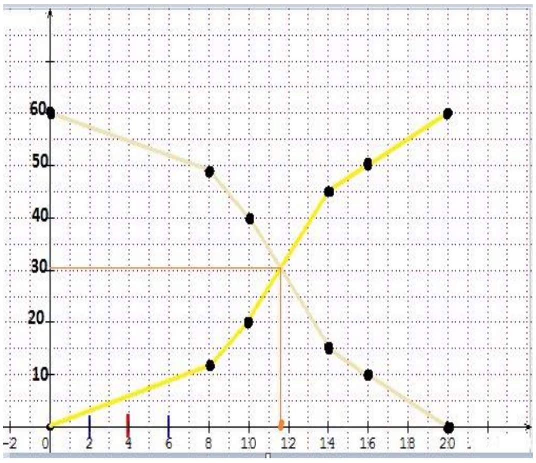
SOLUTION DE L'ACTIVITÉ

1. complétons le tableau :

Notes	[0;8[	[8;10[	[10;14[	[14;16[	[16;20[
Effectifs (n_i)	11	9	25	5	10
Amplitude (A_i)	8	2	4	2	4
Centre (c_i)	4	9	12	15	18
densité (d_i)	1,4	4,5	6,25	2,5	2,5
ECC	11	20	45	50	60
ECD	60	49	40	15	10

2. pour les questions i), ii) et iii) voir figure ci-dessous





3. i. Figure

ii. Voir figure. La courbe obtenue en joignant les points par des lignes est appelée courbe des effectifs cumulés croissant.

iii. Voir figure. La courbe obtenue en joignant les points par des lignes est appelée courbe des effectifs cumulés décroissant.

iv. Le nombre réel 11,6 est une valeur approchée de l'abscisse du point d'intersection des deux courbes. Cette valeur représente la médiane de la série statistique étudiée.

RESUME

1.4 REPRESENTATION GRAPHIQUES PAR LES HISTOGRAMMES ET LES COURBES CUMULATIVES

1.5.1 HISTOGRAMME ET POLYGONE DES EFFECTIFS

Un histogramme est un diagramme formé de rectangles juxtaposés dont les bases sont proportionnelles aux amplitudes et les hauteurs sont proportionnelles

1. aux effectifs si toutes les classes ont la même amplitude,
2. aux densités si toutes les classes n'ont pas la même amplitude.

Un histogramme est utilisé pour représenter une série statistique dont les valeurs sont regroupées en classe. Le polygone des effectifs est une ligne brisée obtenue en joignant dans un repère orthogonal, les points dont les abscisses sont les milieux des classes et les ordonnées sont proportionnelles

1. aux effectifs si toutes les classes ont la même amplitude,
2. aux densités si toutes les classes n'ont pas la même amplitude.

EXEMPLE

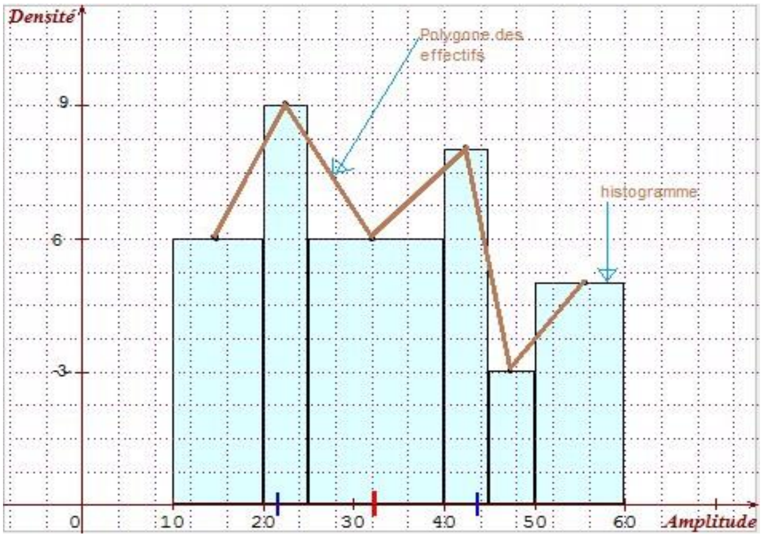
Compléter le tableau des la série statistique suivante puis représenter l'histogramme et le polygone des effectifs.

Classe	[10;20[	[20;25[	[25;40[	[40;45[	[45;50[	[50;60[
Effectifs	60	45	90	40	15	50

Solution

Classe	[10;20[	[20;25[	[25;40[	[40;45[	[45;50[	[50;60[
Effectifs	60	45	90	40	15	50
Amplitude	10	5	15	5	5	10
Densité	6	9	6	8	3	5

On obtient le diagramme suivant :



1.5.2 COURBES DES ECC ET DES ECD

Le polygone des effectifs cumulés croissants est une ligne brisée joignant chacun des points ayant pour abscisse la borne supérieure de la classe et pour ordonnées son effectif cumulé croissant.

Le polygone des effectifs cumulés décroissants est une ligne brisée joignant chacun des points ayant pour abscisse la borne inférieure de la classe et pour ordonnées son effectif cumulé décroissant.

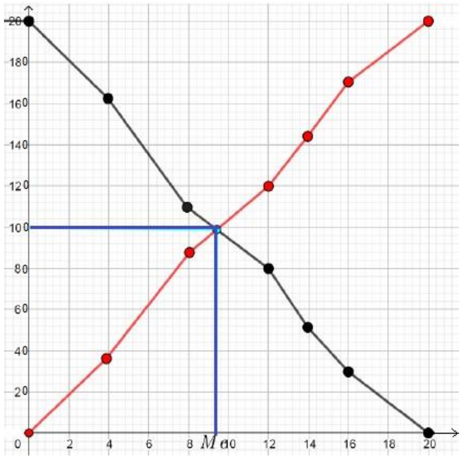
EXEMPLE

Construisons le polygone des ECC et des ECD de la série suivante :

Classe	[0;4[	[4;8[	[8;12[	[12;14[	[14;16[	[16;20[
Effectifs	38	50	32	24	26	30

Solution

Classe	[0;4[	[4;8[	[8;12[	[12;14[	[14;16[	[16;20[
Effectifs	38	50	32	24	26	30
ECC	38	88	120	144	170	200
ECD	200	162	112	80	56	30



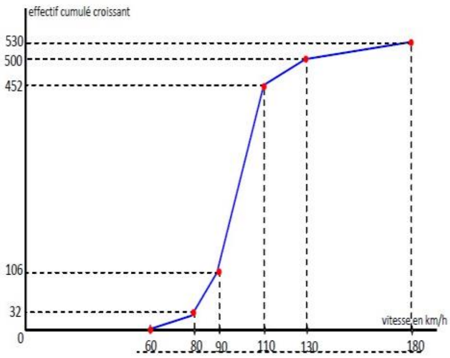
La courbe en rouge représente le polygone des effectifs cumulés croissants et celle en noire le polygone des effectifs cumulés décroissants.

A RETENIR :

L'abscisse du point d'intersection des deux courbes représente la médiane de la série statistique étudiée.

1.5.3 EXERCICES D'APPLICATION

Un contrôle de vitesse a été effectué sur une autoroute ou` la vitesse est limitée à 130km/h. La série statistique obtenue est représentée ci-dessous par son polygone des effectifs cumulés croissants :



1. Établir le tableau faisant ressortir les effectifs et les effectifs cumulés décroissant de cette série.

2. Quel est le pourcentage des véhicules en infraction?
3. Déterminer la classe modale et la moyenne de cette statistique.
4. Construire dans le même repère le polygone des ECD et en déduire graphiquement une valeur approchée de la médiane de cette série statistique.
5. Construire l'histogramme de cette série dans un autre repère.

CHAPITRE:DENOMBREMENT

INTÉRÊT:

Utiliser les outils mathématiques conventionnels pour mieux déterminer le nombre de possibilités dans une expérience de dénombrement.

MOTIVATION:

Être bien préparer pour des expériences de jeu de hasard pour éviter de se faire tromper ou escroquer par des promoteurs de ces jeux.

On considère les ensembles suivants: $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{N}$ et $C = \{0,1,6,67,54\}$.

A est un ensemble infini non dénombrable, B est un ensemble infini et dénombrable et C est un ensemble fini. Un ensemble fini est donc un ensemble dont on connait le nombre d'éléments.

Le nombre d'éléments d'un ensemble est encore appelé **cardinal** de cet ensemble. Par exemple card(C) = 5. Il est question dans ce chapitre de déterminer les cardinaux d'ensemble finis (dénombrer) en utilisant des outils adéquats.

Dénombrer c'est donc énoncer pour en avoir un compte exact les personnes ou les choses qui forment un ensemble fini.

Leçon 1: Premiers outils de dénombrement ***DUREE : 100 Minutes***

OBJECTIFS: A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de dénombrer avec

- Relation entre les parties d'un ensemble fini
- Les arbres de choix, les tableaux à double entrée
- Les produits cartésiens

SITUATION PROBLÈME:

L'enseignant de Njoya lui propose le problème suivant : « Dans un camp de vacances hébergeant 80 personnes, 55 personnes pratiquent la natation, 33 le tennis et 16 ne pratiquent aucun des deux sports. Combien de personnes pratiquent-elles à la fois le tennis et la natation? ». En cas de solution juste, l'enseignant promet à Njoya un menu dans un restaurant où l'on propose les plats suivants:

- Entrées: une salade (S), une purée d'avocats (P)
- Résistance: Koki (K), pilé de pomme de terre (Pi) et Njapche (N)
- Desserts: Ananas (A), Orange (O) et Mangue (M).

1. Quelle solution doit proposer Njoya pour avoir cette récompense?
2. Quel est le nombre de menus possibles en cas de solution juste pour Njoya?

1- RELATION ENTRE LES PARTIES D'UN ENSEMBLE FINI

ACTIVITÉ 1.1.1 :

On donne les ensembles $E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, A = \{1,5,9,8\}$ *et* $B = \{2,5,8,0,4\}$.

1. Quels sont les cardinaux de chacun de ces ensembles? Que représentent les ensembles A et B pour l'ensemble E.
2. Déterminer l'ensemble A ∪ B des éléments qui sont dans A ou dans B.
3. Déterminer l'ensemble A ∩ B des éléments qui sont dans A et dans B.
4. Comparer $card\ (A \cup B)$ avec $card(A) + card(B) - card\ (A \cap B)$.
5. Déterminer l'ensemble $\bar{A}$ des éléments qui ne sont pas dans A et l'ensemble $A - B$ des éléments de A qui ne sont pas dans B.
6. Comparer $card(A)$et $card(E) - card(A)$, puis $card(A - B)$ et $card(A) - card(A \cap B)$.

RÉSUMÉ

VOCABULAIRE :

Soit E un ensemble fini et soient A et B deux parties de E.

- A est une partie de E si tous les éléments de A sont aussi des éléments de E et dans ce cas $card(A) \leq card(E)$.

- A ∪ B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B.

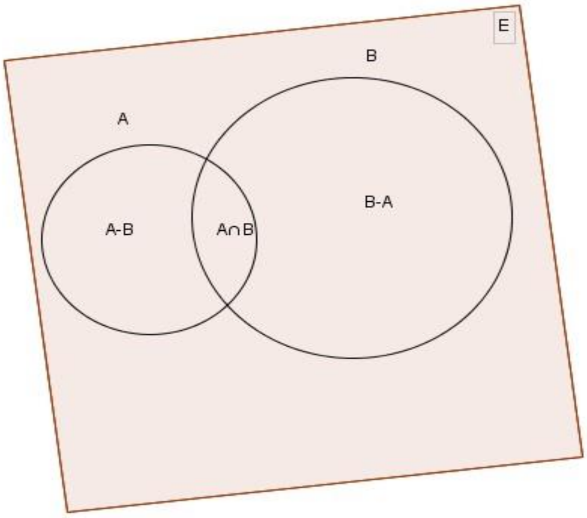
- A ∩ B est l'ensemble des éléments qui sont dans A et dans B.
- $\bar{A}$ ou complémentaire de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A.
- A − B est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B.

PROPRIÉTÉ

On a les propriétés suivantes sur les parties d'un ensemble fini:

- $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$
- $card(\bar{A}) = card(E) - card(A)$
- $card(A - B) = card(A) - card(A \cap B)$.

Ces propriétés peuvent se représenter par le diagramme suivant appelé: **diagramme de VENN**



APPLICATION

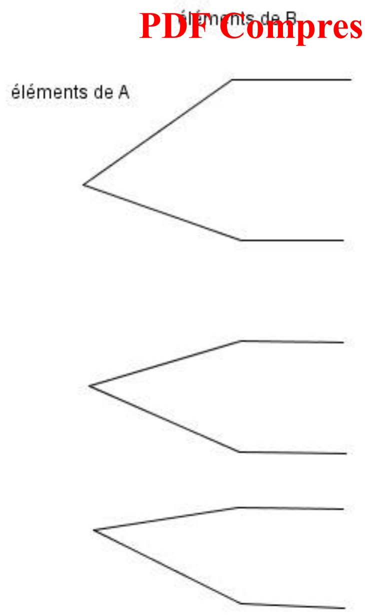
1. Dans une classe de 3^{e}, Tous les élèves étudient au moins l'espagnol et l'allemand. 30 étudient l'espagnol, 20 étudient l'allemand et 15 étudient l'espagnol et l'allemand. Quel est le nombre d'élèves de cette classe?
2. Dans une classe, 3 langues sont pratiquées, On sait que 20 élèves font l'anglais, 15 l'allemand, 18 l'espagnol, 7 l'anglais et l'allemand, 9 l'allemand et l'espagnol, 8 l'anglais et l'espagnol et enfin 5 pratiquent les trois langues. Quel est le nombre d'élèves de la classe sachant que chacun fait au moins une langue?

2- PRODUIT CARTESIEN

ACTIVITÉ:

On donne les ensembles A et B suivants: $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1,2\}$.

1. Complète en colonnes (sur chaque croisement de segment) l'arbre de choix suivant:



2. Déterminer l'ensemble $A \times B$ de tous les couples $(x; y)$ tels que $x \in A \; et \; y \in B$.
3. Comparer $card(A \times B) \; et \; card(A) \times card(B)$.

RÉSUME

DÉFINITION:

Soient $E_1 \; et \; E_2$ deux ensembles finis.

On appelle $E_1 \times E_2$ (produit cartésien de$E_1 \; et \; E_2$) l'ensemble des couples $(x_1; x_2)$ tels que $x_1 \in E_1 \; et \; x_2 \in E_2$.

Le nombre d'éléments de$E_1 \times E_2$ est $card(E_1 \times E_2) = card(E_1) \times card(E_2)$.

De manière générale ; soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$, n ensembles finis.

On appelle produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ l'ensemble des éléments sous la forme $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tels que $x_1 \in E_1, x_2 \in E2, \ldots, x_n \in E_n$.

On a: $card(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n) = card(E_1) \times card(E_2) \times \ldots \times card(E_n)$.

REMARQUE

Les ´éléments d'un produit cartésien peuvent s'obtenir, lorsque les cardinaux sont faibles, en établissant un arbre de choix.

APPLICATION

1. Une femme a dans sa garde-robe: 4 jupes, 5 chemisiers et 3 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste. De combien de façons différentes peut-elle ainsi s'habiller?
2. Deux groupes de 12 et de 15 décide de faire la paix en échangeant des poignées de mains. Chaque membre d'un groupe serre la main de tous les membres de l'autre groupe. Combien de poignées de mains seront-elles échangées?

3- TABLEAU A DOUBLE ENTREE

ACTIVITÉ

Dans une classe de 50 élèves: 24 ont 16 ans, 14 ont 17 ans et les autres ont plus de 17 ans. 23 élèves ont opté pour l'espagnol comme deuxième langue et les autres ont opté pour l'allemand. 13 ´élèves de 16 ans font l'espagnol, 10% des ´élèves de plus de 17 ans font l'allemand.

1. Complète le tableau suivant:

Ages/2e Langue				Total
Total				50

2. Comment appelle-t-on ce type de tableau?

3. Combien d'élèves n'ont pas 16 ans et ne font pas l'espagnol?

RÉSUME:

Dans certains cas pour facilement dénombrer, on peut utiliser un tableau à doublé entrée.

APPLICATION :

Une tentative d'homicide a eu lieu au cours d'un bal. La police a arrêté 18 suspects et leur a demandé de répondre par oui ou par non à chacune des questions suivantes:

« Avez-vous entendu une détonation? » et « Avez-vous vu quelqu'un s'enfuir? ».

10 personnes ont répondu « oui » à la première question, 5 personnes ont répondu « non » à la deuxième question et 6 personnes ont répondu « non » aux deux questions. Quel est le nombre de personnes ayant répondu « oui » aux deux questions?

Leçon 2: P-uplets avec ou sans répétition DUREE : 100 Minutes

OBJECTIFS: A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de:

- reconnaitre un p-uplet ou un p-arrangement
- dénombrer avec les p-uplets et les p-arrangements
- reconnaitre une permutation et dénombrer avec les permutations

SITUATION PROBLÈME:

Pour ouvrir un coffre-fort urgemment, Pemboura doit utiliser un code de 4 chiffres en se servant de 3 indices qui lui arrivent avant chaque tentative ratée:

- indice 1: les chiffres peuvent se répéter dans le code
- indice 2: les chiffres ne peuvent pas se répéter dans le code •
- indice 3: les chiffres qui composent le code sont 1;4; 7 et 9.

1. Quel est le nombre de codes possibles après l'indice 1 ?
2. Quel est le nombre de codes possibles après l'indice 2 ?
3. Quel est le nombre de codes possibles après l'indice 3 ?

ACTIVITÉ:

Soit $E = \{1,2,3,4\}$.

I.

1. Détermine tous les couples $(x; y)$ tels que $x, y \in E$. Quel est le nombre total de couples obtenu?
2. Dans ces couples: l'ordre importe-t-il? Peut-il avoir répétition?
3. *(a)* Combien de possibilités y a-t-il pour le choix de x?
   (b) Combien de possibilités y a-t-il pour le choix de y?
   (c) En déduire une astuce pour déterminer le nombre de couples $(x; y)$.

II.

1. Détermine tous les couples $(x; y)$ tels que $x, y \in E$ et $x \neq y$. Quel est le nombre total de couples obtenu?
2. Dans ces couples: l'ordre importe-t-il? Peut-il avoir répétition?
3. *(a)* Combien de possibilités y a-t-il pour le choix de x?
   (b) Combien de possibilités y a-t-il pour le choix de y?
   (c) En déduire une astuce pour déterminer le nombre de couples $(x; y)$.

III.

1. Détermine tous les quadruplets $(x; y; z; t)$ tel que $x, y, z, t \in E$ et $x \neq y \neq z \neq t$. Ce sont des permutations d'éléments de E. Quel est le nombre de quadruplets obtenu ?
2. *(a)* Combien de possibilités y a-t-il pour le choix du premier élément de la permutation?

   (b) combien de possibilités y a-t-il pour le choix du deuxième élément de la permutation?

   (c) combien de possibilités y a-t-il pour le choix du troisième élément de la permutation?

   (d) En déduire une astuce pour avoir le nombre de permutations de E.

RÉSUME:

1- P-UPLETS AVEC REPETITION

DÉFINITION:

Soit E un ensemble à n éléments et soit $p \in N^* - \{1\}$. On appelle **p-uplet** de E tout élément sous la forme $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ tels que $x_1, x_2, \ldots, x_p \in E$. Le nombre de p-uplets de E est donc n^p.

REMARQUE:

- Un p-uplet de E est aussi un élément du produit cartésien $E \times E \times \ldots \times E$ p fois qui se note encore E^p.
- Dans ce type de p-uplet:
  - l'ordre importe
  - il peut avoir répétition

APPLICATION 1.2.1 :

1. Soit E un ensemble à n éléments. Quel est le nombre possible d'applications de E vers E?
2. Une urne contient 10 boules numérotées de 1 `a 10 indiscernables au toucher. on tire successivement et avec remise 3 boules de cette urne. Quel est le nombre de tirages possibles?
3. les numéros d'immatriculation d'une compagnie sont composés de deux lettres suivies de 4 chiffres non nuls. les lettres sont prises dans l'ensemble des lettres A, B, C et D. Quel est le nombre de numéros d'immatriculations possibles?

2- P-ARRANGEMENT OU P-UPLETS SANS REPETITION

DÉFINITION:

Soit E un ensemble à n éléments et soit $p \leq n$.

On appelle p-arrangement de E ou p − uplet sans répétition, tout p − uplet de E à éléments deux `a deux distincts c'est-à-dire les éléments sous la forme $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ tels que $x_i \in E$ et $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$ et $1 \leq i, j \leq p$.

Le nombre de p − arrangements de E est noté A_n^p et on a: $A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$. (On retranche 1 jusqu'a atteindre p facteurs).

EXEMPLE:

- $A_4^2 = 4 \times 3 = 12$
- $A_{12}^4 = 12 \times 11 \times 10 \times 9$

REMARQUE:

Dans le cas des arrangements:

- l'ordre importe
- Il n'y a pas de répétition possible

APPLICATION:

1. Soit E un ensemble à n éléments. Quel est le nombre d'applications injectives de E vers E?
2. Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire au hasard, successivement et sans remise 3 boules de cette urne. Quel est le nombre de tirages possibles?
3. Christian et Claude font partie d'un club de 18 personnes. On veut constituer un bureau de 5 personnes à 5 fonctions (président, vice-présidente, secrétaire, trésorier et censeur) différentes dans cumul de fonctions.

   (a) Quel est le nombre de bureaux possibles à former?

   (b) Quel est le nombre de bureaux possibles:

   i. Où Christian est présent?

   ii. Où Christian est Trésorier?

   iii. Où Christian et Claude ne sont pas présents?

   iv. Où Christian et Claude ne se retrouvent pas ensemble?

3- PERMUTATIONS

DÉFINITION:

Soit E un ensemble à n éléments. On appelle permutation de E tout n − arrangement de E. Le nombre de permutations de E est noté $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \times 1$.

PROPRIÉTÉ:

- Par convention: $0! = 1$ et $1! = 1$
- $n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)!$
- $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

EXEMPLE:

• $7! = 7 \times 6 \times 5 \times \ 4\ \times\ 3\ \times\ 2\ \times\ 1\ \ ou\ 7! = 7 \times 6 \times 5!$ selon qu'on veut simplifier ou pas.

• $A_7^2 = \frac{7!}{(7-2)!}$

$= \frac{7\times6\times5!}{5!}$

$= 7 \times 6$

$A_7^2 = 42.$

APPLICATION:

1. Résoudre les équations suivantes dans$\mathbb{N}$: $A_n^3 = 72n$; $A_n^4 = 42A_n^2$.
2. Soit E un ensemble à n éléments. Quel est le nombre d'applications bijectives de E vers E?
3. Quel est le nombre d'anagrammes du mot: PRISEE? (On distinguera les cas ou` on tient compte de l'accent et le cas où on n'en tient pas compte).
4. 12 présidents doivent s'assoir sur 12 chaises dans un restaurant.

   (a) Quel est le nombre de dispositions possibles?

   (b) Quel est le nombre de dispositions si l'un des présidents a sa chaise réservée?

Leçon 3: p-combinaison et binôme de Newton **DUREE : 50 Minutes**

OBJECTIFS:

A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de:

- reconnaitre une combinaison d'un ensemble
- dénombrer avec des combinaisons
- utiliser le triangle de Pascal pour développer et réduire

SITUATION PROBLÈME 1.3.1 :

Dans une soirée rassemblant 10 personnes, chaque invité échange une poignée de mains avec chacun de ses convives. Après ces échanges, ils décident de faire un jeu de cache-cache en se séparant en plusieurs groupes.

1. Combien cela fait-il de poignées de mains?
2. Combien cela fait-il de groupes possibles?

ACTIVITÉ :

I. Soit $E = \{1,2,3,4\}$.

1. Détermine toutes les parties de E à 2 éléments. Combien y en a-t-il au total?
2. Dans ces parties l'ordre importe-il? y a-t-il répétition d'éléments?
3. Calcule $\frac{A_4^2}{2!}$ en utilisant les simplifications factorielles vues aux arrangements.
4. Quelle remarque faites-vous?

II. .

1. Développer $(a+b)^2$ et $(a+b)^3$
2. Calculer

$$\sum_{p=0}^{2} C_2^p a^{2-p} b^p \text{ et } \sum_{p=0}^{3} C_3^p a^{3-p} b^p$$

3. Quelles remarques faites-vous?

RÉSUME:

1- P-COMBINAISON

Soit E un ensemble à n éléments et soit $p \leq n$. On appelle **p-combinaison** de E toute partie de E ayant p élément(s). Le nombre de p-combinaisons de E est noté C_n^p et on a $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

PROPRIÉTÉ:

Soit $n, p \in N^*$ $avec$ $p \leq n$.

- $C_n^0 = 1$ et $C_n^1 = n$

- $C_n^p = C_{n-p}^p$.

EXEMPLE:

- $C_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7\times6\times5\times4!}{3\times2\times4!} = = 35.$
- $C_{12}^4 = \frac{12!}{4!8!}$

REMARQUE:

Dans le cas des combinaisons:

- L'ordre n'importe pas
- Les éléments sont deux `a deux distincts (pas de répétition)

APPLICATION:

1. Résoudre les équations suivantes: $C_n^2 = 190$; $2C_n^2 + 6C_n^3 = 9n$
2. On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. On obtient ainsi une main de 5 cartes.

   (a) Dénombrer les mains possibles

   (b) Dénombrer les mains contenant:

   i. exactement deux as

   ii. au moins un as

   iii. l'as de pique et au moins deux trèfles

   iv. 3 cartes d'une couleur et deux autres d'une autre.

2- BINOME DE NEWTON

PROPRIETE :

Pour développer $(a + b)^n$, $n \in \mathbb{N}$,on peut utiliser le binôme de Newton qui stipule que: $(a + b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}$ les coefficients du développement étant les C_n^p.

On peut résumer ces coefficients à l'aide du triangle de Pascal suivant:

Degré	coefficient (triangle de pascal)
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1

REMARQUE :

Soit E un ensemble à n éléments.

Le nombre de parties de E à 0 élément est: C_n^0

Le nombre de parties de E à 1 élément est: C_n^1

Le nombre de parties de E à 2 éléments est: C_n^2

Le nombre de parties de E à n − 1 éléments est: C_n^{n-1}

Le nombre de parties de E à n éléments est: C_n^n.

Ainsi, le nombre de parties de E est: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p = \sum_{p=0}^{n} C_n^p (1)^p (1)^{n-p} = (1+1)^n = 2^n$.

APPLICATION:

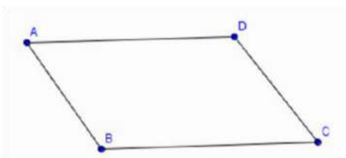
1. Quel est le nombre de parties de l'ensemble $A = \{0,1,6,8,89,45\}$?
2. Développer et réduire $(a-1)^5$ et $(1-3)^6$.

CHAPITRE : INTRODUCTION AU GRAPHE **DUREE : 100 Minutes**

MOTIVATIONS

- Justifier qu'une représentation graphique est un graphe
- justifier qu'un graphe est simple ou orienté ; complet
- déterminer le degré d'un sommet
- reconnaître deux sommets adjacents
- résoudre des problèmes concrets de la vie courante à l'aide d'un graphe

PRÉREQUIS



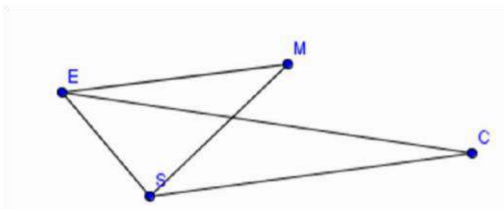
Considérons la figure ci-contre puis donner le nombre de sommet et d'arrêt de ce quadrilatère.

SITUATION DE VIE

Voici les déplacements d'un élève de première scientifique sur quelques jours. Ecole-Maison, Ecole-Chapelle, Ecole-Stade, Stade-Chapelle et Stade-Maison. En matérialisant l'école, la maison la chapelle et le stade par les points E, M, C et S. et les déplacements entre les points par un segment. Faire le graphique présentant tous les déplacements de cet élève.

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

Considérons le graphe suivant



1- déterminer le nombre de sommet
2- déterminer le nombre total d'arrêt
3- recopier et compléter le tableau suivant

Sommet	Nombre de segment connecté au sommet
E	
M	

S	
C	
TOTAL	

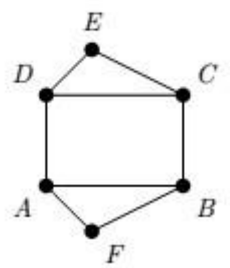
RESUME :

A- VOCABULAIRE :

Un graphe : est un ensemble constitué des ensembles S :{S_1,S_2,S_3,….S_n}de points appelés sommets et d'un ensemble A :{A_1,A_2,A_3…….A_n} d'arrêt qui sont des segments qui relient les sommets. Il est possible que l'on définisse un graphe sous le modèle G={s,n} où s=card(S) c'est-à-dire le nombre de sommet, n=card(A) c'est-à-dire le nombre d'arrête et G est le nom du graphe.

Une arrête : est un segment qui relie deux sommets (on parlera d'arc dans un graphe orienté)

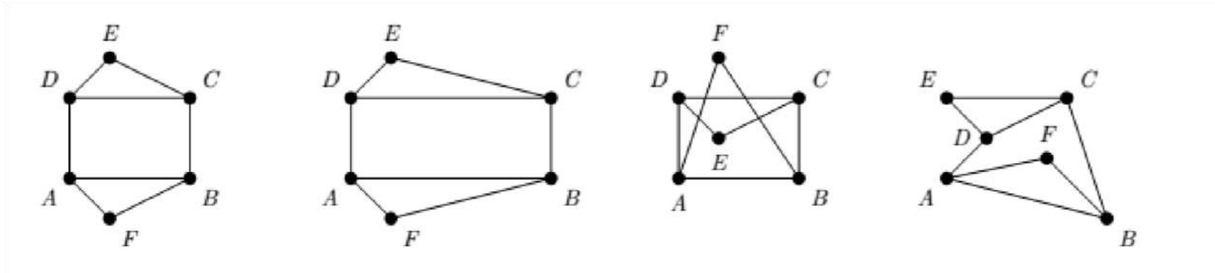
EXEMPLE



La figure ci-contre est un graphe de 6 sommets et de 8 arrêtes

REMARQUE :

Dans un graphe la longueur des arrêtes et la disposition des sommets importe peux Exemple



Tous ces graphes sont identiques car le plus important est le nombre de sommet et le nombre d'arrête. Pour le cas d'espèce toutes ces graphes ont 6 sommets et 8 arrêtes

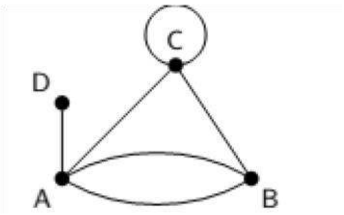
Une boucle : est une arrête reliant un sommet à lui-même

L'arrêt multiple : survient lorsqu'il existe plusieurs arrêtes entre deux sommets.

Deux sommets sont dites adjacents lorsqu'une seule arrête relie ces deux sommets. Un sommet est dit isolé lorsqu'aucune arrête ne relie ce sommet aux autres sommets Une chaîne est une suite d'arrête consécutifs.

La longueur de la chaîne : est donnée par le nombre d'arrête que la chaîne comporte.

EXEMPLE



- Le sommet C a une boucle.
- Les sommets A et D sont adjacents
- Entre les sommets A et B il y'a arrêtes multiple.
- D-A-C-B est une chaîne de longueur 4

Cycle : est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues (on parlera de circuit dans un graphe orienté)

B- CARACTERISTIQUE D'UN GRAPHE

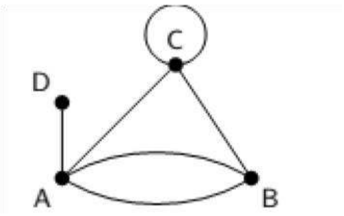
l'ordre d'un graphe est le nombre total de sommet de ce graphe

Le degré d'un sommet est le nombre d'arrête reliant ce sommet

Le degré d'un graphe est donné par la valeur maximale du degré des sommets.

Dans le cas spécifique d'un sommet à boucle, la boucle est comptée pour deux fois lors du degré de ce sommet.

Exemple



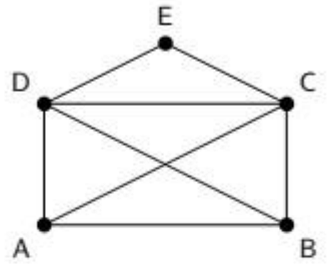
Soit le graphe ci-dessus.

1) préciser l'ordre et le nombre d'arrête
2) pour chaque sommet préciser le degré
3) donner le degré du graphe

C- PROPRIETE

Dans un graphe simple la somme totale des degrés de tous les sommets est égale au double du nombre d'arrête.

EXERCICE D'APPLICATION 1



Soit G le graphe ci-dessus définie par G={5,8}

1) calculer le degré de chaque sommet
2) déduire le degré du graphe
3) Donner par calcul le nombre d'arrête

EXERCICE D'APPLICATION 2

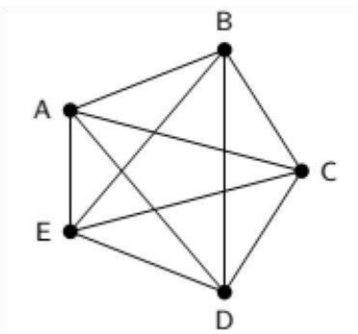
Lors d'une rencontre de 6 amies où tous se sont échangés des poignées de main en guise de salutation.

1) faire un graphique représentant la situation (en considérant les amies comme sommet et les salutations comme arrêtes)
2) déterminer le degré de chaque sommet
3) vérifier la somme de ces degrés est de 30
4) déduire le nombre de salutation faite entre les 6 amies

D- TYPE DE GRAPHE

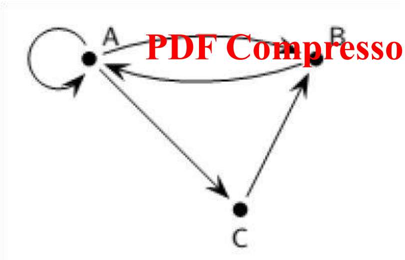
un graphe simple est un graphe qui ne contient pas de boucle et pas d'arrêtes multiples un graphe est complet lorsque tous ses sommets sont adjacents

EXEMPLE de graphe complet



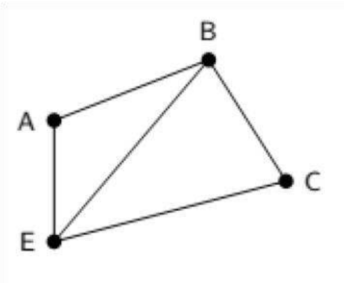
un graphe est dit orienté lorsque chaque arrête à un sens de parcours (matérialisé par une flèche)

EXEMPLE de graphe orienté



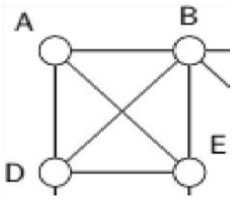
un graphe est dit connexe lorsque pour tout sommet S_i et S_j, il existe toujours un chemin reliant les sommets S_i et S_j.

EXEMPLE de graphe connexe



un graphe est dit stable lorsque tous ses sommets ne sont reliés par aucune arrête.

EXERCICE 1



Sur le plan ci-dessus, les points A, B, D et E sont les sites où l'électricien doit poser l'éclairage de couleur (sommets) comme décoration tous interconnecter par ces fils (arrêtes). Le plan décoration voudrait qu'un fil électrique ne connecte pas des lampes de même couleur. Combien de couleur faut-il prévoir au minimum ?

EXERCICE 2

Une chaîne de diffusion de match de football souhaite diffuser les matchs de première league anglaise de football ayant 20 équipes au départ telle que les matchs doivent se jouer en allerretour et toutes les équipes doivent s'affronter. Les droits de diffusions sont fixés à 20 000 fr le match diffusé. En cas de versement cache pour une diffusion totale une réduction de 15% est possible.

1-) aidez cette chaîne à évaluer le coût pour uniquement la diffusion des matchs aller

2-) Aidez cette chaîne à évaluer le coût pour une diffusion totale (des matchs aller-retour)

MODULE 23	CONFIGURATION ET TRANSFORMATOIN DU PLAN

CHAPITRE : BARYCENTRES

INTERET : Les barycentres sont utilisés pour réduire les sommes des vecteurs

MOTIVATION : Des nombreux problèmes de vie font appel aux notions barycentriques. On peut citer par exemple la recherche du point d'équilibre d'un solide ou d'un système qui varie selon les situations. Ce cours nous permettra de retrouver par des calculs simples ces points d'équilibre.

LECON 1: BARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDERES

DUREE : 100 Minutes

MOTIVATION :

De nombreux problèmes dans la vie font appel aux barycentres, d'où la nécessité maitrisés la manipulation des outils barycentriques. Nous notons ainsi la recherche du centre de gravité d'un solide.

COMPETENCES A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

Déterminer la position d'un point par rapport à deux autres points auquel on a affecté des coefficients pour pouvoir établir un certain équilibre.

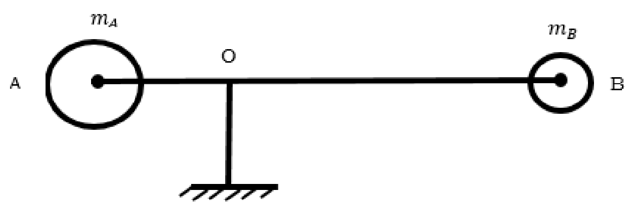
PRE-REQUIS :

Définir le centre de gravité

SITUATION PROBLEME :

Hamadou dispose d'une tige homogène aux extrémités de laquelle on a fixé la sphère lumineuse A et B de masse $m_A = 2\text{kg}$ et $m_B = 3\text{kg}$, pour éclairer sa salle d'étude à l'aide de deux sphères lumineuses. Il doit fixer esthétiquement une autre tige sur la première en un point O de manière à obtenir un équilibre (voire figure ci-dessous)

Déterminer la position du point o par rapport à A.



ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

1) Soit l'application $g(M) = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}$
   a) Réduire l'application $g(M)$ en introduisant le point B.
   b) Que constater vous ?
2) On considère l'égalité vectorielle $2\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{BG} = \vec{0}$
   a) Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$
   b) Exprimer $\overrightarrow{BG}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$
   c) Construire G sachant que $AB = 5\text{cm}$.
3) Répondre à la question de la situation problème.

RÉSOLUTION DE L'ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

1) Soit l'application $g(M) = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}$

a) Réduisons l'application

On a $2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MA} - 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB})$

$$= 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AB}$$

$$= -2\overrightarrow{AB}$$

b) conclusion : le résultat ne dépend pas du point M

II- On considère l'égalité $2\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{BG} = \vec{0}$

a) Exprimons $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$

On a $2\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{BG} = \vec{0}$

En utilisant le oint A on a

$$2\overrightarrow{AG} + 3(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}) = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AG} = \vec{0}$$

$$5\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$

b) Exprimons $\overrightarrow{BG}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$

En utilisant le point B on a

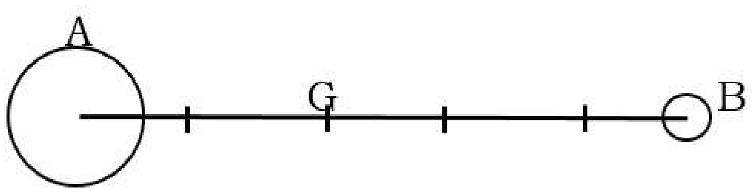
$$2\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{BG} = \vec{0} \ \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}) + 3\overrightarrow{BG} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BG} + 3\overrightarrow{BG} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad 5\overrightarrow{BG} = 3\overrightarrow{BA}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{BG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$$

c) Construisons G sachant que $AB = 5\text{cm}$.



4) **Retour à la situation problème**

Déterminons la position du point O par rapport à A.

L'équilibre est déterminé par la relation

$$O = \{(A; m_A), (B; m_B)\} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AO} = \frac{m_B}{m_A+m_B}\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AO} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$

RESUME :

1) DEFINITIONS

DEFINITION1 :

On appelle point pondère toute écriture de la forme (A ; α) où A est un point et α un réel non nul.

" α " est appelé coefficient affecté au point A.

DÉFINITION 2 :

soient (A ;α) et (B ;β) deux points pondérés, on appelle barycentre du système $\{(A; \alpha), (B; \beta)\}$ l'unique point G vérifiant $\alpha\overrightarrow{AG} + \beta\overrightarrow{BG} = \vec{0}$, avec $\alpha + \beta \neq 0$

NB : on peut encore écrire $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

2) THEOREME

Etant donne deux points pondérés (A ; α) et (B ; β) tels que $\alpha + \beta \neq 0$, il existe un point unique G vérifiant la relation $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

NB :

- un système de points pondères admet un barycentre si et seulement si la somme des coefficients affectes à ces points soit non-nulle.
- Lorsque les coefficients d'un système des points pondères sont tous égaux, le système admet un isobarycentre.

3) EGALITES VECTORIELLES PERMETTANT DE CONSTRUIRE DE BARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDERES.

Si le point G est le barycentre de deux points pondérés (A ;α) et (B ;β), avec $\alpha + \beta \neq 0$, la somme existe si $G = \{(A; \alpha), (B; \beta)\}$

On a alors $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{GA} - \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -(\alpha + \beta)\overrightarrow{AG} = -\beta\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

De la même manière $\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$

4) PROPRIETES

P1 : Homogénéité

Le barycentre d'un système de points pondérés reste inchangé lorsqu'on multiplie les différents coefficients du système par un même nombre non-nul c'est-à-dire :

Si $G = \text{bar}\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$, alors pour tout $k \in \mathbb{R}^*$

$G = \{(A;k\alpha),(B;k\beta)\}$

P2 : Coordonnées du barycentre de deux points pondérés

Pour un plan muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$ si $G = \{(A;\alpha),(B;\beta)\}$ alors ses coordonnées sont :
$x_G = \frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}$; $y_G = \frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}$

EXEMPLE :

On donne $A(-1;3)$ et $B(2;-2)$. On désigne par $G = \{(A;-1),(B;3)\}$

Calculons les coordonnées de G.

$x_G = \frac{-1(-1)+3(2)}{-1+3} = \frac{7}{2}$ et $y_G = \frac{-1(3)+3(-2)}{-1+3} = -\frac{9}{2}$ donc $G(\frac{7}{2};-\frac{9}{2})$

P3 : isobarycentre : milieu du segment [AB]

G est le milieu de segment [AB] si et seulement si G est barycentre des points A et B affecté de mêmes coefficients, c'est-a-dire $G = \{(A;\alpha),(B;\alpha)\}$

5) REDUCTION DE LA SOMME $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$

- Si $\alpha+\beta = 0$ alors on a :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right)$$
$$= (\alpha+\beta)\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{AB}$$
$$= \beta\overrightarrow{AB}$$

car $\alpha+\beta = 0$

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \beta\overrightarrow{AB}$$

Dans ce cas on dit que le vecteur $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$ est constant ou bien qu'il est indépendant de M.

- Si $\alpha+\beta \neq 0$ alors on a : $G = \{(A;\alpha),(B;\beta)\}$ et

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \alpha\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right) + \beta\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)$$

$$= (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} \quad \text{or } \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

Donc $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$

EXERCICES D'APPLICATIONS :

EXERCICE 1

On considère deux points distincts A et B.

1- Soit G le barycentre des points pondérés (A, 2) et (B,-3). Déterminer le réel α tel que : $\overrightarrow{GB} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$; puis construisez le point G.
2- Soit un vecteur $\vec{V}$; montrer qu'il existe un point unique M qui vérifie l'égalité : $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{V}$. Construire ce point.

EXERCICE 2

On considère trois points A, B et C, le point M définie par : $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB} - 4\,\overrightarrow{AC}$ et le point G barycentre des points pondérés (A, 3) et (B, 2).

1- Construire les points M et G.
2- Montrer que M est le barycentre des points pondérés (G, 5) et (C, -4).

LECON 2: Barycentre De Trois et Quatre Points Pondérés

DUREE : 100 Minutes

MOTIVATION : En géométrie on utilise les barycentres pour repérer des points par rapport à d'autres points.

COMPETENCES A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

- D'écrire un point comme barycentre de 3 points pondérés à partir d'une égalité vectorielle et de le construire.
- D'utiliser les barycentres partiels pour prouver l'alignement des points et la concourante des droites.

PRE-REQUIS :

1) A, B et G sont 3 points du plan tel que $5\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. Montrer que $\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG} = \frac{5}{3}\overrightarrow{BA}$
2) Sachant que $AB = 8cm$ placer le point G.
3) A, B et M sont 3 points du plan tel que $3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CA}$ .Montrer que $\overrightarrow{CA}$ est indépendant du point M.

SITUATION PROBLEME :

M. Mayabou est un entrepreneur de la place qui possède un terrain rectangulaire ABCD à l'intérieur duquel se trouve une piscine ayant la forme trapézoïdale JKLM. Il aimerai gazonné le contour de la piscine, l'ensemble des points M couvert par le gazon vérifie la relation $8 \leq \|\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| \leq 12$.

Déterminer la surface de l'espace vert autour de la piscine.

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

I- On considère l'égalité vectorielle $\overrightarrow{GA} - 5\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
   a) Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
   b) Exprimer $\overrightarrow{BG}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$
   c) Exprimer $\overrightarrow{CG}$ en fonction de $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$
   d) Construire le point G dans les 3 cas où ABC est triangle équilatéral.

II- On considère l'application $g(M) = \overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$
   a) Réduire l'expression $\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$
   b) Déterminer l'ensemble de points M tels que $\|\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 8$
   c) Déterminer l'ensemble de points M tels que $\|\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 12$

III- Répondre à la question de la situation problème

RESOLUTION DE L'ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

$-2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

a) Exprimons $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

En utilisant le point A on a :

$$-2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA} = -3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

b) Exprimons $\overrightarrow{BG}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

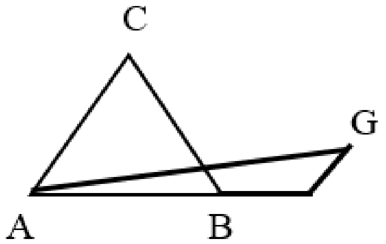
On a: $-2\overrightarrow{GB} + -2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

c) Exprimons $\overrightarrow{CG}$ en fonction de $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$.

De la même manière $\overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{CA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$

d) Construisons le point G.



II- On considère l'application $g(M) = \overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$

a) Réduisons l'expression $\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MG}$ en introduisant le point G

b) Déterminons l'ensemble de points M tels que $\|\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 8$

$$\|\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \|-2\overrightarrow{MG}\| = 8$$

$$\Leftrightarrow \quad \|\overrightarrow{MG}\| = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad MG = 4$$

L'ensemble de points M est le cercle de centre G et de rayon 4.

c) Déterminer l'ensemble de points M tels que $\|\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 12$

$$\|\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 12 \Leftrightarrow \|-2\overrightarrow{MG}\| = 12$$
$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MG}\| = 6$$
$$\Leftrightarrow \quad MG = 6$$

L'ensemble de points M est le cercle de centre G et de rayon 6.

III- Répondons à la situation problème

Déterminons la surface de l'espace vert autour de la piscine

On a : $\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MG}$

Ainsi $8 \leq \|\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| \leq 12 \Leftrightarrow \quad 8 \leq \|-2\overrightarrow{MG}\| \leq 12$

$$\Leftrightarrow \quad 8 \leq 2MG \leq 12$$
$$\Leftrightarrow \quad 4 \leq MG \leq 6$$

D'où la surface de l'espace vert délimitée par le gazon autour de la piscine est l'intersection du cercle de centre G et de rayon 4 avec celui du même centre et de rayon 6.

RESUME:

1) THEOREME ET DEFINITION

Soient (A ;α) ; (B ;β) et (C ;γ) trois points pondérés tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Il existe un unique point G du plan tel que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ou encore $\alpha\overrightarrow{AG} + \beta\overrightarrow{BG} + \gamma\overrightarrow{CG} = \vec{0}$.

Le point G est appelé barycentre du système $\{(A\,;\alpha)\,;\,(B\,;\beta);\,(C\,;\gamma)\}$.

On note :$G = \text{bar}\{(A\,;\alpha)\,;\,(B\,;\beta);\,(C\,;\gamma)\}$

a)Egalités vectorielles permettant la construction du point G.

$\alpha\overrightarrow{AG} + \beta\overrightarrow{BG} + \gamma\overrightarrow{CG} = \vec{0}$ conduit à : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{BA} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{CG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CB}$$

2) PROPRIETES

P1 : Homogénéité : Le barycentre d'un système de 3 points pondérés reste inchangé lorsqu'on multiplie les coefficients de ce système par un même nombre réel non nul.

Pour tout $k\epsilon R^*$, si $G = \{(A\,;\alpha)\,;\,(B\,;\beta);\,(C\,;\gamma)\}$ alors

$$G = \{(A\,;k\alpha)\,;\,(B\,;k\beta);\,(C\,;k\gamma)\}$$

P2 : Coordonnées d'un barycentre.

Dans le plan muni du repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$. Si $G = \{(A\,;\alpha)\,;\,(B\,;\beta);\,(C\,;\gamma)\}$ alors :

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \\ y_G = \frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} \end{cases}$$

P3 : Barycentre partiel

Soit $\{(A\,;\alpha)\,;\,(B\,;\beta);\,(C\,;\gamma)\}$ un système de points pondérées tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ et $\alpha+\beta \neq 0$

Si $G = \{(A\,;\alpha)\,;\,(B\,;\beta);\,(C\,;\gamma)\}$ et $H = \{(A\,;\alpha)\,;\,(B\,;\beta)\}$ alors $G = \{(H\,;\alpha+\beta)\,;\,(C\,;\gamma)\}$

On dit dans ce cas que H est un barycentre partiel.

P4 : isobarycentre : centre de gravité du triangle ABC

G est le centre de gravité du triangle ABC si et seulement si G est barycentre des points A, B et C affectés des même coefficients. C'est-a-dire $G = \{(A\,;\alpha)\,;\,(B\,;\alpha);\,(C\,;\alpha)\}$.

3) CONSTRUCTION DE LA SOMME $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$.

- Si $\alpha+\beta+\gamma = 0$ on a :

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC} &= \alpha\overrightarrow{MA}+\beta(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})+\gamma(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}) \\ &= (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC} \\ &= \vec{0}+\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

D'où $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC} = \beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}$

On dit dans ce cas que le vecteur $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$ est constant.

- Si $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ alors il existe G tel que $G = \{(A\,;\alpha)\,;\,(B\,;\beta);\,(C\,;\gamma)\}$ et on

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

4) UTILISATION DES BARYCENTRES

Les barycentres peuvent être utilisés pour montrer que 3 points sont alignés ou pour montrer que les droites sont concourantes.

a) ALIGNEMENT DES POINTS

MÉTHODE :

pour montrer que 3 points sont alignés, il suffit d'écrire l'un comme barycentre des deux autres.

b) CONCOURANTES DES DROITES

Méthode : pour montrer que 3 droites (AB) ; (CD) et (EF) sont concourantes, il suffit de prouver l'existence d'un point G qui soit à la fois barycentre des points A et B, barycentre des points C et D et barycentre des points E et F.

EXERCICE D'APPLICATION

ABC est un triangle quelconque les points M ; N ; O ; et P sont tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$

O milieu du segment $[CM]$.

1) Démontrer que les points B ; N et O sont alignés.

2) Démontrer que les droites (AM) ; (BN) et (CM) sont concourantes.

3) Réaliser la figure.

LECON 3 : LES LIGNES DE NIVEAU *DUREE : 100 Minutes*

MOTIVATION : En géométrie on utilise les barycentres pour repérer des points par rapport à d'autres points ; en statistique pour repérer la moyenne des points pondérer.

COMPETENCES A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

Déterminer les lignes de niveau des certaines applications :

- $\left\|\sum \alpha_i \overrightarrow{MA_i}\right\| = k$;
- $MA^2 - MB^2 = k$;
- $MA^2 + MB^2 = k$;
- $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$

PRE-REQUIS :

Soit C un point du plan, construire l'ensemble des points M du plan tel que : $CM = 4cm$

SITUATION PROBLEME :

Mayabou est propriétaire d'un jardin, il souhaite le clôturer avec un grillage qui coute 2350F le mètre. Son fils élève en classe de la première D dit que la longueur du grillage à acheter est le périmètre en mètre de l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 850$, avec $AB = 10m$.

Quelle somme va-t-il dépenser pour clôturer son jardin.

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

i. AB est un segment de longueur 10cm
   1. soit M un point du plan
      a. Démontrer que $MA^2 + MB^2 = MI^2 + 8$, avec la position du point I à déterminer.
      b. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 850$.
   2. Soit N un point du plan
      a. Montrer que $NA^2 - NB^2 = 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{NI}$.
      b. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = -80$.

ii. Soit l'application g qui à tout point P du plan associe le vecteur $\overrightarrow{g(P)} = 2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC}$

a) Montrer que $g(P) = 8\overrightarrow{PG}$

b) Déterminer l'ensemble des points P du plan tels que $\overrightarrow{g(P)} = \vec{0}$

III- Répondre à la situation problème

RESOLUTION

1-a) Démontrons que $\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 = \mathrm{MI}^2 + 50$

Soit $\mathrm{I} = \mathrm{mil}[\mathrm{AB}]$

On a $\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 = \left(\overrightarrow{\mathrm{MI}} + \overrightarrow{\mathrm{IA}}\right)^2 + \left(\overrightarrow{\mathrm{MI}} + \overrightarrow{\mathrm{IB}}\right)^2$

$= 2\mathrm{MI}^2 + \mathrm{IA}^2 + \mathrm{IB}^2$

$= 2\mathrm{MI}^2 + 2\mathrm{IA}^2$

$= 2\mathrm{MI}^2 + 2(5^2)$

D'où $\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 = 2\mathrm{MI}^2 + 50$

b) Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que $\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 = 850$.

$\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 = 850 \quad \Leftrightarrow \; 2\mathrm{MI}^2 + 50 = 850$

$\Leftrightarrow \; 2\mathrm{MI}^2 = 800$

$\Leftrightarrow \; MI^2 = 400$

$\Leftrightarrow \; MI = 20$

D'où M$\in C(I; 20)$.

- Construction voir la figure ci-dessous

2-a) Démontrons que $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MI}$.

Soit $I = mil[AB]$

On a $MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$

$= \overrightarrow{BA}(2\overrightarrow{MI})$

D'où $MA^2 + MB^2 = 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MI}$

b)

- Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = -80$.

$MA^2 - MB^2 = -80 \quad \Leftrightarrow \; 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MI} = -80$

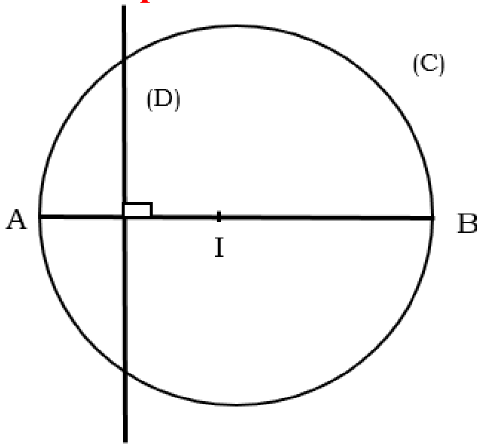
Soit H le projeté orthogonal du point M sur la droite (AB)

On a : $2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MI} = -80 \;\; \Leftrightarrow \; 2\overline{BA}.\overline{HI} = -80$

$\Leftrightarrow \; \overline{HI} = \frac{-80}{2\overline{BA}}$

M appartient à la droite (D) passant par H et perpendiculaire à (AB).

- Construisons l'ensemble des points M



3) a) Montrons que $g(M) = 8\overrightarrow{MG}$

Introduisons le point $G = bar\{(A\,;2)\,;\,(B\,;3);\,(C\,;3)\}$

On a : $g(M) = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow g(M) = 8\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC}$

$\Leftrightarrow g(M) = 8\overrightarrow{MG}$ Car $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

D'où $g(M) = 8\overrightarrow{MG}$

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $g(M) = \vec{0}$

On a $g(M) = \vec{0} \Leftrightarrow 8\overrightarrow{MG} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow MG = 0$

Le M est confondu au point G.

III- **Répondons à la situation problème**

- Déterminons d'abord le périmètre en mètre du jardin
  En introduisant le point $I = mil[AB]$

On a : $MA^2 + MB^2 = 850 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = 850$

$\Leftrightarrow 2MI^2 + IA^2 + IB^2 = 850$

$\Leftrightarrow 2MI^2 + 2IA^2 = 850$

$\Leftrightarrow 2MI^2 + 2(5^2) = 850$

$\Leftrightarrow 2MI^2 = 800$

$\Leftrightarrow MI^2 = 400$

$\Leftrightarrow \quad MI = 20$

Son jardin a la forme circulaire de rayon 20m

Ainsi le périmètre vaut :

$P = 2\pi r \quad \Leftrightarrow \quad P = 125{,}6m$

- Déterminons à présent la somme dépensée par le père de Doulane
  On sait que $1m \quad \rightarrow \quad 2350F$
  $125{,}6m \quad \rightarrow \quad S\,F$

  $S = 295160F$
  Donc le père de Doulane va dépenser au total la somme de $295160F$ pour clôturer son jardin.

RESUME:

1) DEFINITION

Une ligne de niveau est la représentation graphique d'une fonction définie du plan vers l'ensemble des nombres réels. Elle peut être :

- Soit un ensemble vide ;
- Soit un singleton point du plan ;
- Soit une droite ;
- Soit un cercle.

2) LIGNES DE NIVEAU DU TYPE: $\left\|\sum \alpha_i \overrightarrow{MA_i}\right\|$

Soit $\{(A\,;\alpha)\,;\,(B\,;\beta);\,(C\,;\gamma)\}$ un système des points pondérés tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ et k un réel positif.

En posant $G = bar\{(A\,;\alpha)\,;\,(B\,;\beta);\,(C\,;\gamma)\}$

On a : $\left\|\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}\right\| = k \;\Leftrightarrow\; \left\|(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}\right\| = k$

$$\Leftrightarrow \|(\alpha+\beta+\gamma)\|.\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = k$$

$$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \frac{k}{\|(\alpha+\beta+\gamma)\|}$$

- Si k=0 alors $\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 0$, l'ensemble recherché se réduit à un point G ;
- Si $k > 0$ alors l'ensemble recherché est un cercle de centre G et de rayon $\frac{k}{\|(\alpha+\beta+\gamma)\|}$

3) LIGNES DE NIVEAU DU TYPE: $MA^2 + MB^2 = k$

$I = mil[AB]$

On a : $MA^2 + MB^2 = k \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = k$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 + IA^2 + IB^2 = k$$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 + 2IA^2 = k$$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 + 2(\frac{AB}{2})^2 = k$$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = k$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2}(k - \frac{AB^2}{2})$$

- Si $k - \frac{AB^2}{2} < 0$ alors l'ensemble recherché est vide ;
- Si $k - \frac{AB^2}{2} = 0$ alors l'ensemble recherché se réduit à I ;
- Si $k - \frac{AB^2}{2} > 0$ alors l'ensemble recherché est un cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k - \frac{AB^2}{2}}$.

4) LIGNES DE NIVEAU DU TYPE: $MA^2 - MB^2 = k$

Soit (D) l'ensemble des points M vérifiant : $MA^2 - MB^2 = k$, avec k un réel.

Soit $I = mil[AB]$

On a $MA^2 - MB^2 = k \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) = k$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB})\right)\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = k$$

$$\Leftrightarrow \left(-\overrightarrow{AB}\right)\left(2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) = k$$

$MA^2 - MB^2 = k \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BA}\right)\left(2\overrightarrow{MI}\right) = k$ Car $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MI} = \frac{k}{2}$$

Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB)

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MI} = \frac{k}{2} \Leftrightarrow \overline{BA}.\overline{HI} = \frac{k}{2}$

$$\Leftrightarrow \overline{HI} = \frac{k}{2\overline{BA}}$$

On distingue trois cas suivant les valeurs de k:

- Si $k > 0$, alors les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{HI}$ sont de même sens ;
- Si $k < 0$, alors les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{HI}$ sont de même sens contraires ;
- Si $k = 0$, alors le point H est confondu à I.

On conclut que (D) est la droite perpendiculaire à (AB) passant par H.

5) LIGNES DE NIVEAU DU TYPE: $\frac{MA}{MB} = k$

Soit (Σ) l'ensemble des points M vérifiant : $\frac{MA}{MB} = k$, avec k un réel positif.

- Si $k = 1$, alors $\frac{MA}{MB} = 1 \Leftrightarrow \ MA = MB$
  Dans ce cas (Σ) est la médiatrice du segment [AB].
- Si $k \neq 1$, alors $\frac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow \ \frac{MA^2}{MB^2} = k^2$

$$\Leftrightarrow \ MA^2 = k.MB^2$$

$$\Leftrightarrow \ MA^2 - k.MB^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) = 0$$

En posant $G_1 = \text{bar}\{(A\,;1)\,;\,(B\,;-k)\}$ et $G_2 = \text{bar}\{(A\,;1)\,;\,(B\,;k)\}$

$$\frac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow (1-k)\overrightarrow{MG_1}.(1+k)\overrightarrow{MG_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG_1}.\overrightarrow{MG_2} = 0$$

D'où (Σ) est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$.

EXERCICE D'APPLICATION

IV- Soit ABC un triangle

1- simplifier le vecteur $-3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

2- Soit le point G du plan tel que $4\overrightarrow{MG} = -3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

Démontrer que le point G est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients que l'on déterminera

3- Soient les points D, E et K tels que D est le milieu de [AC], $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Démontrer que les droites (AK), (BD) et (CE) sont concourantes.

V- Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 8\text{cm}$

1- a) Déterminer et construire le barycentre G des points $(A; 3)$ et $(B; -1)$

b) Calculer AG^2 et BG^2

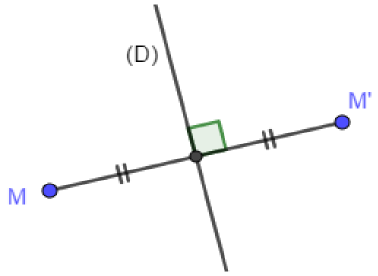
c) Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan tels que $3MA^2 - MB^2 = 72$

2- Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = -40$

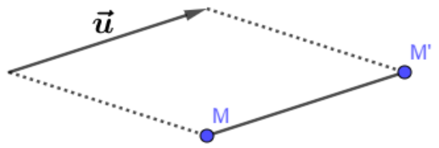
CHAPITRE : TRANSFORMATIONS AFFINES DU PLAN

RAPPELS :

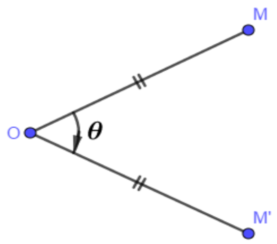
- On appelle isométrie du plan toute application du plan dans lui-même qui conserve les distances.
- Une symétrie orthogonale d'axe la droite (D) noté S_D est une application du plan dans lui-même qui à un point M, on associe le point M' tel que :
  - ✓ $M = M'$ si $M \in (D)$.
  - ✓ (D) est la médiatrice du segment $[MM']$ si $M \notin (D)$.



- Une translation du vecteur $\vec{u}$ noté $t_{\vec{u}}$ est une application du plan dans lui-même qui à un point M, on associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.



- On appelle rotation de centre O et d'angle θ notée $R_{(O,\theta)}$ l'application du plan qui à un point M on associe le point M' tel que $\begin{cases} mes\left(\widehat{\overrightarrow{OM}\,;\,\overrightarrow{OM'}}\right) = \theta \\ OM = OM' \end{cases}$



- Les rotations, les symétries orthogonales et les translations sont des isométries.

Soit O un point du plan et k un réel non nul.

- On appelle homothétie de centre O et de rapport k notée $H_{(\Omega,k)}$ la transformation qui à chaque point M du plan fait correspondre le point M' tel que :$\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$.
  L'expression analytique de l'homothétie de centre $\Omega(a;b)$ et de rapport k est : $\begin{cases} x' = kx + (1-k)a \\ y' = ky + (1-k)b \end{cases}$. Tout système de la forme $\begin{cases} x' = kx + a \\ y' = ky + b \end{cases}$, $k \neq 1$ est l'expression de l'homothétie de rapport k et de centre $\Omega\begin{pmatrix} \frac{a}{1-k} \\ \frac{b}{1-k} \end{pmatrix}$

LEÇON 1 : COMPOSEE DE DEUX SYMETRIES ORTHOGONALES

Durée : 100 Minutes

MOTIVATION :

Dans la décoration, les objets symétriques sont très beaux à voir et donne une certaine beauté à la décoration.

OBJECTIFS :

Caractériser la composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles et d'axes sécants

CONTRÔLE DES PRÉREQUIS :

ABCD est carré de centre O. I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [AD].

1. Faire la figure.
2. Compléter le tableau ci-dessous :

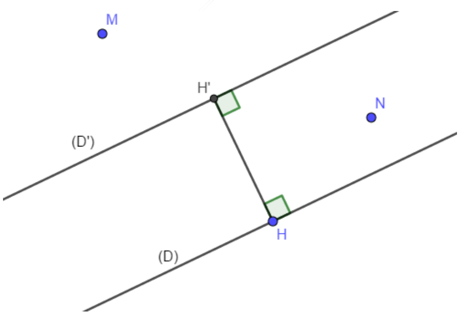
	A	B	C	D	O	I	J	K	L
$S_{(BD)}$									
$t_{\overrightarrow{IJ}}$		B'	C'	D'			J'	K'	

3. Construire les points B', C', D', J' et K'.
4. Construire les points $A' = S_{(BC)}(A)$ et $L' = S_{(BC)}(L)$.

SITUATION DE VIE :

Pour décorer une salle de fête, un artiste a dessiné des figures et a tracé deux droites parallèles. Il voudrait reproduire ses figures en faisant deux symétries successives par rapports aux deux droites. Quelle transformation simple peut-il utiliser ?

ACTIVITÉ 1 :

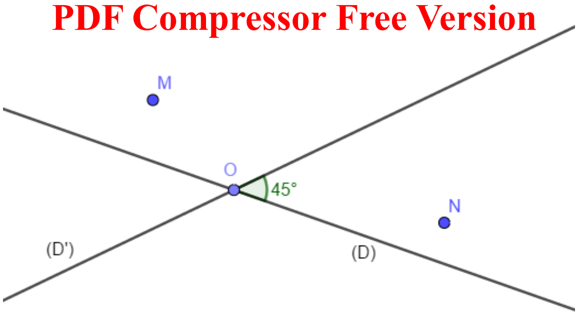


On considère la figure suivante où (D) et (D') sont deux droites parallèles :

1. Construire les points $M_1 = S_{(D')}(M)$ et $M' = S_{(D)}(M_1)$. ($M' = S_{(D)} \circ S_{(D')}(M)$.
2. En s'inspirant du 1., construire nt du 1., construire $N' = S_{(D)} \circ S_{(D')}(N)$.
3. Vérifier que $\overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{H'H}$
4. En déduire que $S_{(D)} \circ S_{(D')}$ est une translation dont on précisera le vecteur de translation.

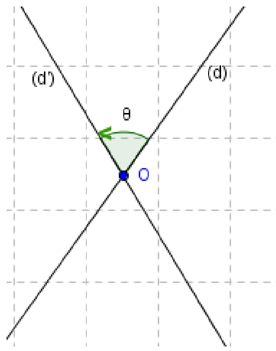
ACTIVITÉ 2 :

On considère la figure suivante où (D) et (D') sont deux droites sécantes en O.

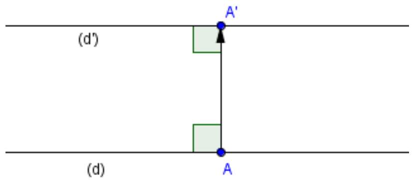


1. Construire les points $M_1 = S_{(D')}(M)$ et $M' = S_{(D)}(M_1)$. ($M' = S_{(D)} \circ S_{(D')}(M)$.
2. En s'inspirant de la question 1., construire le point $N' = S_{(D)} \circ S_{(D')}(N)$.
3. Vérifier que $mes(\widehat{\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{ON'}}) = mes(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 2mes(\widehat{\vec{u'}, \vec{u}})$ où $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont les vecteurs directeurs respectifs de (D) et (D').
4. En déduire que $S_{(D)} \circ S_{(D')}$ est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

RÉSUMÉ :



- La composée de deux réflexions (ou symétries) $\boldsymbol{S_{(d)}}$ et $\boldsymbol{S_{(d')}}$ d'axes sécants en $\boldsymbol{O}$ est une rotation de centre $\boldsymbol{O}$. Plus précisément, si $(\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{u}})$ et $(\boldsymbol{d'}) = (\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{v}})$, alors $\boldsymbol{S_{(d')} \, o \, S_{(d)} = r}$ où $\boldsymbol{r}$ est une rotation de centre $\boldsymbol{O}$ et d'angle $\boldsymbol{\alpha = 2(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 2\theta}$.
- Réciproquement, toute rotation de centre $\boldsymbol{O}$ et d'angle θ peut s'écrire comme composé de deux réflexions (symétries) d'axes sécants en $\boldsymbol{O}$ dont l'un (d) peut être choisi arbitrairement et (d') telle que l'angle orienté entre (d) et (d') soient $\frac{\theta}{2}$. Ainsi $S_{d'} \circ S_d = r_{\left(O, 2\frac{\theta}{2}\right)} = r_{(O,\theta)}$. (**Décomposition d'une rotation**)



- La composée de deux symétries axiales d'axes parallèles est une translation. $S_{d'} \circ S_d = t_{2\vec{u}}$ où $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$
- Réciproquement : toute translation est égale (d'une infinité de manières) à la composée de deux réflexions d'axes parallèles. (d) est choisi de telle sorte que $\vec{u}$ soit un vecteur normal de (d) et $(d') = t_{\frac{\vec{u}}{2}}(d)$. $S_{d'} \circ S_d = t_{2\frac{\vec{u}}{2}} = t_{\vec{u}}$ (**Décomposition d'une translation**).

EXERCICE D'APPLICATION :

Soit ABCD un carré de centre O et de sens direct. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations $S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$ et $S_{(AB)} \circ S_{(CD)}$.

LEÇON 2 : COMPOSÉE DE DEUX ROTATIONS Durée : 100 Minutes

MOTIVATION :
On utilise les rotations pour tourner les figures autour d'un point.

OBJECTIFS :
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de deux rotations de même centre.

CONTRÔLE DES PRÉREQUIS :
Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct.

1. Quel est l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
2. Construire le point A' image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et le point C', image de C par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

SITUATION PROBLÈME :
Une rotation est une transformation du plan. La composition de deux rotations est-elle encore une transformation du plan ?

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE
Soit A un point du plan. r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et r' la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. Soit M un point quelconque du plan. Construire le point M_1 image de M par r' et M' image de M_1 par r. $(M' = r \circ r'(M))$.
2. Déterminer $r \circ r'(A)$.
3. Déterminer la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}})$.
4. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $r \circ r'$.

RÉSUMÉ
La composée de deux rotations de même centre O et d'angle θ et θ' est une rotation de centre O d'angle $\theta + \theta'$. Lorsque $\theta + \theta' = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ alors cette composée est l'identité du plan.

EXERCICE D'APPLICATION
Soit A un point du plan ; $r_1 = R_{\left(A,-\frac{\pi}{4}\right)}, r_2 = R_{\left(A,\frac{2\pi}{3}\right)}\ et\ r_3 = R_{\left(A,\frac{4\pi}{3}\right)}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $r_1 \circ r_2$; $r_2 \circ r_3$ et $r_1 \circ r_3$.

Leçon 3 Composée d'homothéties et translation

Durée : 100 Minutes

MOTIVATION :

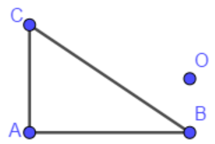
Les homothéties nous permettent d'agrandir ou de réduire les figures.

OBJECTIFS :

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la composée de deux homothéties de même centre et de la composée d'une homothétie et d'une translation.

CONTRÔLE DE PRÉREQUIS :

1. Construis l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre 0 et de rapport 2.



2. Le plan muni d'un repère (O,I,J), on donne le point $A(-1;3)$ et le vecteur $\vec{u}(2;4)$.
   a) Donner l'expression analytique de l'homothétie de centre A et de rapport -3.
   b) Donner l'expression analytique de la translation du vecteur $\vec{u}$.

SITUATION PROBLÈME :

Les homothéties et les translations sont des transformations du plan. La composée de deux homothéties de même centre et la composée d'une homothétie et d'une translation sont-elles des transformations du plan ?

ACTIVITÉS D'APPRENTISSAGE :

ACTIVITÉ 1 :

Soit h_1 l'homothétie de centre O et de rapport k et h_2 l'homothétie de centre O et de rapport k'.

1) Soit M un point du plan et $M_1 = h_2(M)$. Exprimer $\overrightarrow{OM_1}$ en fonction de $\overrightarrow{OM}$.
2) On note $M' = h_1(M_1)(M' = h_1 \circ h_2(M))$. Exprimer $\overrightarrow{OM'}$ en fonction de $\overrightarrow{OM}$.
3) En déduire la nature et les éléments caractéristiques $h_1 \circ h_2$.

ACTIVITÉ 2 :

Le plan est muni d'un repère (O,I,J). On donne $A(1;2)$ et $\vec{u}(-3;1)$. On note h l'homothétie de centre A et de rapport 3, puis t la translation du vecteur $\vec{u}$.

1. Soit $M(x,y)$ et $M_1(x_1;x_2)$ tel que $M_1 = t(M)$. Exprimer x_1 en fonction de x et y_1 en fonction de y.
2. Soit $M'(x';y')$ tel que $M' = h(M_1)(M' = h \circ t(M))$. Exprimer x' en fonction de x et y' en fonction de y.
3. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $h \circ t$.

RÉSUMÉ :

- La composée de deux homothéties de même centre et de rapports k et k' est une homothétie de même centre et de rapport $k \times k'$.
- La composée d'une homothétie de rapport k $(k \neq 1)$ et d'une translation est une homothétie de rapport k. Le centre de l'homothétie peut être déterminé par les expressions analytiques ou par la recherche d'un point fixe de la composée ; en effet, si $t \circ h(O) = O$, alors O est le centre de l'homothétie.

EXERCICE D'APPLICATION :

Soit h l'homothétie de centre $A(-3; 2)$ et rapport 4 ; h' l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$ et t la translation du vecteur $\vec{u}(1; -1)$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $h \circ h'$.
2. Déterminer les expressions analytiques de $h, t, t \circ h \ et \ h \circ t$.
3. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $t \circ h \ et \ h \circ t$.

FIN