

# MATHS

TA<sub>4</sub>

# **MATHS**

**Terminale A4**



## Table des matières

PDF Compressor Free Version

CHAPITRE I : EQUATIONS-INEQUATIONS, SYSTEMES.....	2
I. équation et inéquation du type : $ax + b$ (1 <sup>er</sup> degré).....	2
A- équations.....	2
B- inéquations.....	3
C- équation et inéquation du second degré.....	5
D- équations et inéquations du degré 3 (ordre 3).....	9
E- équations et inéquations bicarrées.....	12
E1. équations bicarrées.....	12
F- équations et inéquations liant deux fractions rationnelles.....	15
CHAPITRE 2 : ETUDE DE FONCTION.....	17
I. Rappels sur la Notion de limites et de continuité.....	17
II. notion de dérivée.....	25
III. étude de fonction.....	31
A- parité :.....	31
B. fonction logarithme népérien.....	32
C. fonction exponentielle.....	37
IV. Equation – Inéquations.....	38
V. étude graphique de la fonction exponentielle.....	39
CHAPITRE 3 : PROBABILITE.....	41
I. dénombrement.....	41
II. Outils d'Analyse Combinatoire.....	42
III. probabilité.....	44
Bibliographie.....	1

## CHAPITRE I : EQUATIONS-INEQUATIONS, SYSTEMES

PDF Compressor Free Version

### I. équation et inéquation du type : $ax + b$ (1<sup>er</sup> degré)

#### A- équations

Une équation de la forme  $ax + b = 0$ , où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels est appelée équation du 1<sup>er</sup> degré ou équation d'ordre 1. Cette équation admet :

- Une solution unique si  $a \neq 0$  Cette solution est  $\frac{-b}{a} \Rightarrow S = \left\{ \frac{-b}{a} \right\}$
  - Aucune solution si  $a = 0$  et  $b \neq 0 \Rightarrow S = \emptyset$
- Exemple : Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

a)  $-3x + 2 = 0$

b)  $x + 1 = x - 2$

c)  $4x + 6 = 0$

d)  $3x - 1 = 0$

e)  $2(x - 1) + 3(x + 1) = x - 1$

#### Solution

a)  $-3x + 2 = 0 \Rightarrow -3x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{-3} \Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$$S = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$$

b)  $x + 1 = x - 2 \Rightarrow x - x + 1 - 2 = 0 \Rightarrow 0x - 1 = 0; a = 0 \Rightarrow$

$$S = \emptyset$$

c)  $4x + 6 = 0 \Rightarrow 4x = -6 \Rightarrow x = \frac{-6}{4} \Rightarrow x = \frac{-3}{2} \Rightarrow$

$$S = \left\{ \frac{-3}{2} \right\}$$

d)  $3x - 1 = 0 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow X = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$$S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

$$e) \left\{ \begin{array}{l} 2(x - 1) + 3(x - 1) = x - 1 \\ \Rightarrow 2x - 2 + 3x - 1 = x - 1 \\ \Rightarrow 5x - x - 3 + 1 = 0 \\ \Rightarrow 4x - 2 = 0 \quad 4x = 2 \quad x = \frac{2}{4} \quad x = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

## B- inéquations

### PDF Compressor Free Version

Pour résoudre les inéquations du premier degré, il suffit d'étudier le signe du polynôme

$P(x) = ax + b$ . Pour ce fait, on détermine une racine de P. C'est-à-dire une solution de l'équation  $P(x) = 0$

$$P(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \quad x = \frac{-b}{a}$$

$X$	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax + b (a \neq 0)$	Signe contraire du signe de a		Signe de a

**Exemple :** Résoudre les inéquations :

a)  $x + 1 \geq 0$

b)  $1 - x \geq 0$

c)  $2x - 1 < 0$

d)  $2x + 4 > 0$

e)  $2(x - 1) > x + 1$

Solution

**1<sup>ère</sup> Méthode:**  $x + 1 \geq 0$   
 $\Rightarrow x \geq -1$

$$S = [-1; +\infty[$$

**2<sup>ème</sup> Méthode:**  $x + 1 \geq 0$

$$\Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$X$	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x + 1$	-		+

$$S = [-1; +\infty[$$

b)  $1 - x \geq 0$

**1<sup>ère</sup> Méthode:**  $1 - x \geq 0$

$$\Rightarrow -x \geq -1 \Rightarrow x \leq 1$$

$$S = ]-\infty; 1]$$

**2<sup>ème</sup> Méthode:**  $1 - x \geq 0$

$$\Rightarrow -x \geq -1 \Rightarrow x \leq 1$$

<b>PDF Compressor Free Version</b>	$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$1 - x$		+	-	

$$S = ] - \infty; 1]$$

c)  $2x - 1 < 0$

**1<sup>ère</sup> Méthode:**  $2x - 1 < 0$

$$\Rightarrow 2x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$$

$$S = ] - \infty; \frac{1}{2}[$$

**2<sup>ème</sup> Méthode:**  $2x - 1 < 0$

$$\Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x - 1$	+	-	

$$S = ] - \infty; \frac{1}{2}[$$

d)  $2x - 4 > 0$

**1<sup>ère</sup> Méthode:**  $2x - 4 > 0$

$$\Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > \frac{4}{2} \Rightarrow x > 2$$

$$S = ]2; +\infty[$$

**2<sup>ème</sup> Méthode:**  $2x - 4 > 0$

$$\Rightarrow 2x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2x = 4$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{2}$$

$$\Rightarrow x = 2$$

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$2x - 4$	-	+	

$$S = ]2; +\infty[$$

e)  $2(x-1) > (x+1)$   
**PDF Compressor Free Version**

$$\Rightarrow 2x - 2 > x + 1$$

$$\Rightarrow 2x - x - 2 - 1 > 0$$

$$\Rightarrow x - 3 > 0$$

$$\Rightarrow x > 3$$

$$S = ] 3; +\infty [$$

## C- équation et inéquation du second degré

### 1- équation

On considère le polynôme P définie par

$$P(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a \neq 0 \text{ Où } a, b, c \text{ sont des réels}$$

Résoudre l'équation  $P(x)=0$  revient à déterminer au préalable les racines de P afin de déterminer la forme factorisée.

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad P = \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

On pose:  $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si  $\Delta < 0$  alors P n'est pas factorisable, d'où  $S = \emptyset$
- Si  $\Delta = 0$  alors P a une racine unique  $\frac{-b}{2a}$  et  $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$  d'où  $S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$
- Si  $\Delta > 0$  alors P a 2 racines distincts  $x_1$  et  $x_2$  telles que :

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

D'où la forme factorisée de P est  $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

$$S = \{x_1; x_2\}$$

**NB :** Le nombre réel  $\Delta$  tel que  $\Delta = b^2 - 4ac$  est appelé discriminant du polynôme P.

**Exemple :** Résoudre les équations suivantes :

$$1) x^2 - x - 6 = 0$$

$$2) x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$3) -x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$4) 3x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$5) x^2 + x - 12 = 0$$

$$6) 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)(x - 5)$$

**Solution**

$$1) x^2 - x - 6 = 0$$

On pose:  $\Delta = 1 + 24$

$$\Delta = 25$$

$$\Delta = 5^2$$

**PDF Compressor Free Version**

$$X_1 = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2}; X_1 = -2$$

$$X_2 = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2}; X_2 = 3$$

$$S = \{-2; 3\}$$

$$1) x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$\text{On pose: } \Delta = 4 - 12$$

$$\Delta = -8$$

$$\Delta < 0 \text{ donc } S = \emptyset$$

$$3) -x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$\text{On pose } \Delta = 9 - 20$$

$$= -11$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow S = \emptyset$$

$$4) 3x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{6} = 1$$

$$S = \{1\}$$

$$5) x^2 + x - 12 = 0$$

$$\text{On pose: } \Delta = 1 + 48$$

$$\Delta = 49$$

$$\Delta = 7^2$$

$$x_1 = \frac{-1-7}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-1+7}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$S = \{-4; 3\}$$

$$6) 4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)(x-5)$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 2x^2 - 10x + x - 5$$

$$4x^2 + 4x + 1 - 2x^2 + 9x + 5 = 0$$

$$2x^2 + 13x + 6 = 0$$

$$\text{On pose: } \Delta = 13^2 - 4 \times 12$$

$$\Delta = 169 - 48$$

$$\Delta = 121$$

$$\Delta = 11^2$$

$$\Delta = 11^2$$

$$x_1 = \frac{-13-11}{4} = -6 \quad x_2 = \frac{-13+11}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$S = \{-6; \frac{-1}{2}\}$$

**Remarque:** Le calcul de  $\Delta$  n'est pas toujours indispensable pour résoudre une équation du 2<sup>nd</sup> degré. Par exemple l'équation :  $2x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(2x+5) = 0$

$$\Leftrightarrow S = \{0; \frac{-5}{2}\}$$

Quelque fois on peut simplifier les calculs en posant  $b' = \frac{b}{2}$  et  $\Delta' = b'^2 - ac$  (discriminant réduit)



- PDF Compressor Free Version**
- Si  $\Delta' < 0 \Rightarrow$  pas de racine
  - Si  $\Delta = 0 \Rightarrow$  racine double :  $x_0 = \frac{-b'}{a}$
  - Si  $\Delta' > 0 \Rightarrow$  deux racines  $x_1 = \frac{-b' - \Delta'}{a}$  et  $x_2 = \frac{-b' + \Delta'}{a}$

## 2- inéquations

Pour résoudre une inéquation du 2<sup>nd</sup> degré, il suffit d'étudier le signe du polynôme  $P(x)$ .

Pour étudier le signe de  $p(x)$ , on calcule son discriminant et on utilise l'un des tableaux suivants :

- Si  $\Delta' < 0$ ,  $P$  n'a pas de racine

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	Signe de $a$	

- Si  $\Delta = 0$ ,  $P$  admet une racine double alors  $P(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2$

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$P(x)$	Signe de $a$		Signe de $a$

- Si  $\Delta > 0$  alors  $P$  a 2 racines distincts et la forme factorisée de  $P$  est  $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$
$x-x_1$	-	+	+	
$x-x_2$	-	-	+	
$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$	Signe de $a$		Signe contraire de $a$	Signe de $a$

L'étude de signe du polynôme  $P$  permet de résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations

**Exemple :** Dans chacun des cas suivants, étudier le signe du polynôme  $P$  et en déduire les solutions de l'inéquation  $P(x) \leq 0$ .

- $P(x) = -2x^2 - 4x + 6$
- $P(x) = 3x^2 - 6x + 3$
- $P(x) = -x^2 + 3x - 5$
- $P(x) = (2x-3)(x+5)$

**Solution**

$P(x) = -2x^2 - 4x + 6$  on pose :  $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(-2)(6)$$

$$\Delta = 16 + 48$$

$$\Delta = 64$$

$$\Delta = 8^2$$

$\Delta > 0$ , donc  $P$  a deux racines distinctes qui sont :  $X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_1 = \frac{4-8}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_2 = \frac{4+8}{-4} = \frac{12}{-4} = -3$$

La forme factorisée de P est : **P(x) = -2(x-1)(x+3)**

Tableau de signe :

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
X+3	-	+	+	
x-1	-	-	+	
(x-1)(x+3)	+	-	+	
-2(x-1)(x+3)	-	+	-	

$$S = ]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$$

b)  $P(x) = 3x^2 - 6x + 3$

On pose  $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = (-6)^2 - 4(3) \times (3)$$

$$\Delta = 36 - 36$$

$$\Delta = 0$$

Donc P admet une racine double:  $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \times 3} = \frac{6}{6} = 1$

La forme factorisée de P est : **P(x) = 3(x-1)<sup>2</sup> = 3(x-1)(x-1)**

Tableau de signe

X	$-\infty$	1	$+\infty$
x-1	-	+	
x-1	-	+	
(x-1) <sup>2</sup>	+	+	
3(x-1) <sup>2</sup>	+	+	

$$S = \{1\}$$

c)  $P(x) = -x^2 + 3x - 5$

On pose  $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = (3)^2 - 4(-1) \times (-5)$$

$$\Delta = 9 - 20$$

$$\Delta = -11$$

$\Delta < 0$ , P n'a pas donc de racine. P(x) est toujours du même signe que a = -1

D'où le tableau

X	$-\infty$	$+\infty$
P(x)	-	

$$S = \mathbb{R} = ]-\infty ; +\infty [$$

d)  $P(x) = (2x-3)(x+5)$

On a déjà la forme factorisée de P et les 2 racines sont : -5 et  $\frac{3}{2}$

Tableau de signe

X	$-\infty$	-5	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
X+5	-	+	+	+
2x-3	-	-	+	+
P(x)	+	-	+	+

$$S = [-5 ; \frac{3}{2}]$$

### D- équations et inéquations du degré 3 (ordre 3)

On considère le polynôme P tel que  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Pour résoudre une inéquation de type  $P(x) = 0$  ou une inéquation de type  $P(x) \geq 0$  ou  $P(x) \leq 0$  ; il faut :

- Rechercher une racine évidente de P si elle, existe puis déterminer un polynôme du 2<sup>nd</sup> degré Q tel  $P(x) = (x - \alpha) Q(x)$ . Le calcul des coefficients de Q peut être fait à partir de l'égalité des polynômes (identification) ou par division Euclidienne ou encore par la méthode de Horner.
- Dresser le tableau de signe de p(x) et en déduire les solutions de l'équation donnée impliquant P.

Exemple : On considère le polynôme P définie par :

$$P(x) = -2x^3 + 3x^2 + 5x - 6$$

a) Vérifier que (2) est une racine de P.

b) Déterminer un polynôme Q tel que  $P(x) = (x-2) Q(x)$

c) Résoudre  $P(x) = 0$

d) Résoudre  $P(x) \geq 0$  et  $P(x) < 0$

### Solution

$$P(x) = -2x^3 + 3x^2 + 5x - 6$$

a) Vérifions que 2 est racine :

$$P(2) = -2(2^3) + (3) \times 2^2 + 5 \times 2 - 6$$

$P(2) = -16 + 12 + 10 - 6$   
 $P(2) = -22 + 22$   
 $P(2) = 0$  d'où 2 est racine de P.

b) Déterminons un polynôme Q

**Procédons par division euclidienne :**

$$\begin{array}{r|l}
 -2x^3 + 3x^2 + 5x - 6 & x - 2 \\
 +2x^3 - 4x^2 & -2x^2 - x + 3 \\
 \hline
 -x^2 + 5x - 6 & \\
 +x^2 - 2x - 6 & \\
 \hline
 3x - 6 & \\
 -3x + 6 & \\
 \hline
 0 & 
 \end{array}$$

**Méthode de Horner**

	-2	3	5	-6
2		-4	-2	6
	-2	-1	3	0
	a	B	C	

D'où  $P(x) = (x-2)(-2x^2-x+3)$

c) Résolvons  $P(x) = 0$

$(x-2)(-2x^2-x+3) = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0$  ou  $-2x^2-x+3 = 0$   $a=-2, b=-1, c=3$   
 $\Leftrightarrow x = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1)^2 - 4(-2) \times (3)$

$\Delta = 1 + 24$

$\Delta = 25$

$\Delta = 5^2$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_1 = \frac{1-5}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_2 = \frac{1+5}{-4} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$

$S = \{-\frac{3}{2}; 1; 2\}$

d) Résoudre  $P(x) \geq 0$  et  $P(x) < 0$

$P(x) = -2(x-2)(x-1)(x+\frac{3}{2})$

## PDF Compressor Free Version

Tableau de signe :

X	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	1	2	$+\infty$
$(x + \frac{3}{2})$	-	+	+	+	
$(x-1)$	-	-	+	+	
$(x-2)$	-	-	-	+	
$(x-2)(x-1)(x + \frac{3}{2})$	-	+	-	+	
$-2(x-2)(x-1)(x + \frac{3}{2})$	+	-	+	-	

$$P(X) \geq 0 \Rightarrow S = ]-\infty; \frac{3}{2}] \cup [1; 2]$$

$$P(x) < 0 \Rightarrow S = ] \frac{3}{2}; 1[ \cup ] 2; +\infty [$$

### Exercice d'Application

On considère le polynôme P de définie par :  $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

a) Vérifier que  $P(-2) = 0$

b) En déduire un polynôme Q de degré 2 tel que  $P(x) = (x+2) Q(x)$

c) Factoriser Q(x)

d) Etudier le signe de P(x)

e) En déduire les solutions de l'inéquation  $P(x) \leq 0$

#### Résolution

Soit  $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

a) Vérifions que  $P(-2) = 0$

$$P(-2) = (-2)^3 - 3 \times (-2)^2 - 4(-2) + 12$$

$$P(-2) = -8 - 12 + 8 + 12$$

$$P(-2) = 0$$

b) Déduisons en Q(x)

Procédons par la division euclidienne

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 3x^2 - 4x + 12 & x + 2 \\
 - x^3 + 2x^2 & x^2 - 5x + 6 \\
 \hline
 -5x^2 - 4x + 12 & \\
 +5x + 10x & \\
 \hline
 6x + 1 & \\
 -6x - 12 & \\
 \hline
 0 & 
 \end{array}$$

$$\text{Donc : } P(x) = (x+2)(x^2 - 5x + 6)$$

c) Factorisons Q(x)

$$Q(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$a=1 ; b=-5 ; c=6$$

$$\text{On pose: } \Delta = b^2 - 4ac$$

**PDF Compressor Free Version**

$$\Delta = (-5)^2 - 4(6)(1)$$

$$\Delta = 25 - 24$$

$$\Delta = 1$$

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_1 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_2 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Donc  $Q(x) = (x-2)(x-3)$

d) Etudions le signe de  $P(x)$

$$P(x) = (x+2)(x-2)(x-3)$$

D'où le tableau de signe

x	$-\infty$	-2	2	3	$+\infty$
x+2	-	+	+	+	
x-2	-	-	+	+	
x-3	-	-	-	+	
P(x)	-	+	-	+	

e) Les solutions de  $P(x) \leq 0$

$$\Rightarrow S = ]-\infty; -2] \cup [2; 3]$$

## E- équations et inéquations bicarrées

### E1. équations bicarrées

On considère un polynôme  $P$  tel que  $P(x) = ax^4 + bx^2 + c$ .

Pour résoudre une équation de type  $P(x) = 0$ , on procède par un changement de variable en posant  $X = x^2$  pour ramener l'expression  $ax^4 + bx^2 + c$  à une expression du 2<sup>nd</sup> degré de variable  $X$ . L'équation  $ax^4 + bx^2 + c$  est appelée une équation bicarrée.

**Exemple** : Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , les équations :

a)  $2x^4 + 5x^2 - 3 = 0$

b)  $X^4 - 6x^2 + 9 = 0$

c)  $X^4 + x^2 + 2 = 0$

d)  $X^4 - 4x^2 + 3 = 0$

#### Résolution

a)  $2x^4 + 5x^2 - 3 = 0$  Posons :  $X = x^2$ ;

L'équation devient:  $2X^2 + 5X - 3 = 0$   $a=2$  ;  $b=5$  ;  $c=-3$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Delta = (5)^2 - 4(2)(-3)$$

$$\Delta = (5)^2 - 4(2)(-3)$$

$$\Delta = 25 + 24 \quad \Delta = 49$$

$$\Delta = 7^2$$

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_1 = \frac{-5-7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

PDF Compressor Free Version

$$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_2 = \frac{-5+7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$X_1 = -3 \text{ ou } X_2 = \frac{1}{2} \text{ or } X = x^2$$

Donc:  $x^2 = -3$ , impossible

$$x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = +\sqrt{\frac{1}{2}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow x = +\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad S = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; +\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

b)  $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$  posons :  $X = x^2$ , L'équation devient:  $X^2 - 6X + 9 = 0$  ;  $a=1$  ;  $b=-6$  ;  $c=9$

$$\text{On pose: } \Delta = b^2 - 4ac \quad \Delta = (-6)^2 - 4 \times 9$$

$$\Delta = 36 - 36$$

$$\Delta = 0 ; \text{ on a une racine double : } X = \frac{6}{2} = 3$$

$$x^2 = 3 \Rightarrow x = +\sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3} \quad S = \{-\sqrt{3}; +\sqrt{3}\}$$

c)  $x^4 + x^2 + 2 = 0$  on pose  $X = x^2$

$$X^2 + X + 2 = 0 \quad a=1 ; b=1 ; c=2$$

$$\text{On pose: } \Delta = b^2 - 4ac \quad \Delta = (1)^2 - 4 \times 1 \times 2$$

$$\Delta = -7 ; \Delta < 0 \text{ donc } S = \emptyset$$

e)  $X^4 - 4X + 3 = 0$  on pose  $X = x^2$

$$X^2 - 4X + 3 = 0 \quad a=1 ; b=-4 ; c=3$$

$$\text{On pose: } \Delta = b^2 - 4ac \quad \Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3$$

$$\Delta = 16 - 12$$

$$\Delta = 4 = 2^2$$

$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_1 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_2 = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1$$

$$x^2 = 3 \Rightarrow x = -\sqrt{3} ; x = +\sqrt{3}$$

$$S = \{-\sqrt{3}; -1; 1; +\sqrt{3}\}$$

## e2. Inéquations

Pour résoudre une inéquation bicarrée, on procède par le même chemin en posant  $x^2 = X$  ; puis on étudie le signe du polynôme.

Exemple : Résoudre dans IR l'inéquation :

$$x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0$$

$$\text{Posons } X = x^2 \Rightarrow X^2 - 5X + 4 \leq 0 \quad a=1 ; b=-5 ; c=4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4$$

$$\Delta = 25 - 16$$

$$\Delta = 9 \Rightarrow \Delta = 3^2 \text{ d'où le polynôme admet deux racines distinctes}$$

$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_1 = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

PDF Compressor Free Version

$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_2 = \frac{5+3}{2} = 4$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = -2 ; x = +2$$

$$\Rightarrow P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$$

Tableau de signe

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
X+2	-	+	+	+	+	
X+1	-	-	+	+	+	
x-1	-	-	-	+	+	
X+1	-	-	-	-	+	
P(x)	+	-	+	-	+	

$$P(x) \leq 0 \Rightarrow S = [-2; -1] \cup [1; 2]$$

b)  $2x^4 - 5x + 7 \leq 0$  on pose  $X = x^2$

$$2X^2 - 5X + 7 \leq 0 \quad a=2; b=-5 ; c=7$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 7$$

$$\Delta = -39$$

$\Delta < 0$  donc le signe est celui de  $a$  ;  $a$  est positif.

x	$-\infty$	$+\infty$
P(x)	+	

$$P(x) \leq 0 \Rightarrow S = \emptyset$$

c)  $-3x^4 + 6x^2 - 3 \leq 0$  on pose  $X = x^2$

$$-3X^2 + 6X - 3 \leq 0 \quad a=-3 ; b=6 ; c=-3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Delta = (6)^2 - 4(-3) \times (-3)$$

$$\Delta = 36 - 36 \Rightarrow \Delta = 0 \quad \text{donc P a une racine double} \quad x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \times (-3)} = \frac{-6}{-6} = 1$$

$$P(x) = -3(X-1)^2$$

$$P(x) \leq 0 \Rightarrow -3(X-1)^2 \leq 0 \quad \text{Or } X = x^2$$

$$\Rightarrow -3[(x-1)(x+1)]^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow -3(x-1)^2(x+1)^2 \leq 0$$



x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
-3	-	-	-	
$(x+1)^2$	+	+	+	
$(x-1)^2$	+	+	+	
$-3(x-1)^2(x+1)^2$	-	-	-	

S=IR

## F- équations et inéquations liant deux fractions rationnelles

### F1. Équations

Soit P, Q, R et S quatre polynômes. Les équations liant deux fractions sont de la forme :  $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{S(x)}$

Résoudre de telles équations revient à résoudre l'équation :  $P(x) \times S(x) = R(x) \times Q(x)$ , avec  $Q(x) \neq 0$  et  $S(x) \neq 0$

**Exemple** : Résoudre dans IR :

a)  $\frac{1}{x-2} = \frac{x-7}{x-2}$

Condition d'existence :

L'équation existe si et seulement si  $x-2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$  ; Le domaine d'existence est **IR/ {2}**

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-2} = \frac{x-7}{x-2} &\Leftrightarrow x-2 = (x-2)(x-7) \\ &\Leftrightarrow (x-2) - (x-2)(x-7) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)(-x+8) = 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow X=2$  ou  $x=8$  or 2 n'appartient pas au domaine de définition donc **S= {8}**

### Exercice d'application

b) Résoudre dans IR :  $\frac{3-2x}{4x+5} = 0$  ;  $\frac{x-1}{x+1} = \frac{-2x+3}{x-2}$  ;  $\frac{3x+3}{4} + 2x = \frac{3x+5}{2}$

**Inéquation de type** :  $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq \frac{R(x)}{S(x)}$

Pour résoudre une inéquation liant 2 fractions rationnelles :

- On détermine la condition d'existence ;
- On établit  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{R(x)}{S(x)}$  puis on étudie le signe de  $f(x)$  après avoir réduit au même dénominateur.

**Attention** :  $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq \frac{R(x)}{S(x)}$  n'est pas équivalent à  $P(x) \times S(x) \leq R(x) \times Q(x)$ .

c) **Exemple** : Résoudre dans IR  $\frac{2x-5}{x+1} \leq \frac{1-3x}{x-3}$

L'inéquation existe si et seulement si :  $x+1 \neq 0$  et  $x-3 \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq -1 \text{ et } x \neq 3 \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$$

$$\begin{aligned} \frac{2x-5}{x+1} \leq \frac{1-3x}{x-3} &\Leftrightarrow \frac{2x-5}{x+1} - \frac{1-3x}{x-3} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(2x-5)(x-3) - (x+1)(1-x)}{(x+1)(x-3)} \leq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x^2 - 9x + 14}{(x+1)(x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 9x + 14 \leq 0 \quad \text{on pose } \Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta = (-9)^2 - 4 \times 5 \times 14$$

$$\Delta = -199 < 0$$

Tableau de signe

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$5x^2 - 9x + 14$	+	+	+	
$X+1$	-	+	+	
$x-3$	-	-	+	
$F(x)$	+	-	+	

$$S = ]-1; 3[$$

**Exercice d'application**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

a)  $\frac{-x+3}{x+1} < \frac{x-2}{x-4}$

b)  $\frac{-5x+4}{x+1} < 1$

c)  $\frac{x-1}{x+3} > 0$

d)  $\frac{x-2}{3x+1} \leq \frac{1-x}{x+2}$

## CHAPITRE 2 : ETUDE DE FONCTION

PDF Compressor Free Version

### I. Rappels sur la Notion de limites et de continuité

#### 1. Limites de référence :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est paire} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} a = a$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a = a$
	$\lim_{x \rightarrow b} a = a$

**Exemple:** Calculer les limites suivantes:

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$ ;      b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3$ ;      c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4$ ;      d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$ ;      e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1}$ ;

f)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x+1)$ ;      g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x-2}$ ;      h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x)$ ;      i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2$

**Résolution**

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ ;      b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ ;      c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$ ;      d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ ;      e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = 0$ ;

f)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 3$ ;      g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x-2} = -\frac{1}{2}$ ;      h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$ ;      i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 = -\infty$

#### Limite des fonctions polynômes et fonctions rationnelles

**A retenir :**

- ✓ La limite en l'infini d'un polynôme est égale à la limite en l'infini de son monôme de plus haut degré.

**Exemple :** Calculer les limites suivantes :

**PDF Compressor Free Version**

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^6 + 3x^2 + 1$  ;

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 + 1$  ;

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 + x^2 + 1$

**Resolution**

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^6 + 3x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^6 = +\infty$  ;

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 + x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = +\infty$

✓ La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite en l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

**Exemple :** Calculer les limites suivantes

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2}{x} \right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2}{3x^2} \right) = \frac{2}{3}$

**Attention :**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{2^2 - 2 \cdot 2 + 1}{2 - 1} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{0^2 - 3 \cdot 0 + 2}{3 \cdot 0^2 - 1} = -2$

**Limite à gauche, limite à droite**

Elle se calcul à gauche et à droite de la valeur interdite du domaine de définition.

**Exemple:** Calculer la limite à gauche et à droite dans chacun des cas suivants :

a)  $F(x) = \frac{3x-1}{x+1}$  a = -1

b)  $\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$  a = 2

Calculons la limite à gauche et à droite :

$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x-1}{x+1} = \frac{3(-1)-1}{0^-} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x-1}{x+1} = \frac{3(-1)-1}{0^+} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
-4	-		-
X+1	-		+
	+		-

D'où  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} = \frac{2^2 - 2 \cdot 2 + 1}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} = \frac{2^2 - 2 \cdot 2 + 1}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

#### Utilisation du tableau de signe

x	$-\infty$	2	$+\infty$
3	+		+
x-2	-		+
	-		+

D'où  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$

### 1.2. notion d'asymptotes

#### a- asymptotes parallèles aux axes du repère

**A RETENIR :** Lorsqu'une fonction admet pour limite un nombre réel  $a$  en  $+\infty$  ou en  $-\infty$  ; alors la droite d'équation  $y = a$  est une asymptote horizontale à la courbe de la fonction.

**Exemple :** Calculer la limite en l'infini de  $f$  et en déduire d'éventuelles asymptotes.

a)  $F(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2}$       b)  $f(x) = \frac{3x - 6}{x^2 + 1}$       c)  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$

**Solution**  
**PDF Compressor Free Version**

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2+1}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{x^2} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{x^2} \right) = 1$$

Donc la droite d'équation  $y = 1$  est asymptote Horizontale à la courbe ( $C_f$ ).

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x-6}{x^2+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x-6}{x^2+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3}{x} \right) = 0$$

Donc la droite d'équation  $y=0$  est asymptote horizontale à la courbe ( $C_f$ ).

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2+3}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2+3}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty$$

Donc il n'existe pas d'asymptote horizontale.

- Lorsqu'une fonction admet pour limite  $+\infty$  ou  $-\infty$  à gauche ou à droite en  $x_0$ ; alors la droite d'équation  $x = x_0$  est une asymptote verticale à la courbe.

**Exemple :** Calculer les limites à gauche et à droite et en déduire d'éventuelles asymptotes :

$$a) f(x) = \frac{x-1}{x+1} \quad a=-1; \quad b) f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad a=2$$

**Solution:**

$$a) \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left( \frac{x-1}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left( \frac{-2}{0^-} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left( \frac{x-1}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left( \frac{-2}{0^+} \right) = -\infty$$

Donc la droite d'équation  $X = -1$  est asymptote à ( $C_f$ ).

$$b) \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \frac{3x-2}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \frac{4}{0^-} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{3x-2}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{4}{0^+} \right) = +\infty$$

Donc la droite d'équation  $X=2$  est asymptote à ( $C_f$ ).

**b- Asymptote Oblique**  
**PDF Compressor Free Version**

**A RETENIR :** soit  $f$  une fonction et  $(C_f)$  sa courbe représentative. Lorsqu'il existe une quantité  $y = ax + b$  telle que :  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$  alors la droite d'équation  $y = ax + b$  est dite asymptote

Oblique de  $(C)$ .

**Exercice d'application**

- 1- Soit la fonction définie par :  $f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 1}{x + 2}$
- a) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$
  - b) Calculer les limites aux bornes de  $D_f$ .
  - c) Déterminer 3 réels  $a$ ,  $b$ , et  $c$  tels que  $\forall x \in D_f, f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}$
  - d) Démontrer qu'il existe une asymptote oblique à  $(C_f)$ .
- 2- Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition et calculer les limites aux bornes du domaine.
- a)  $f(x) = x + 1$  ;
  - b)  $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$  ;
  - c)  $f(x) = \frac{1}{x}$  ;
  - d)  $f(x) = \frac{1}{x + 1}$  ;
  - e)  $f(x) = \frac{x - 2}{x - 3}$  ;
  - f)  $f(x) = \frac{-x^3 + x + 1}{x + 1}$

**Solution**

- 1- Soit  $f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 1}{x + 2}$
- a) Déterminons le domaine de définition  
 $f$  existe si et seulement si :  $x + 2 \neq 0 \rightarrow x \neq -2$

$$D_f = \mathbb{R} / \{-2\}$$

- b) Calculons les limites aux bornes de  $D_f$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{-x^2 + 3x - 1}{x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{-x^2}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-x^2+3x-1}{x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-x^2}{x} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \frac{-4-6-1}{0^-} \right) = \frac{-11}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{-4-6-1}{0^+} \right) = \frac{-11}{0^+} = -\infty$$

Donc la droite d'équation  $X = -2$  est asymptote verticale

c) Déterminons trois réels  $a$ ,  $b$ , et  $c$

→ Par identification :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax+b + \frac{c}{x+2} \rightarrow f(x) = \frac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2} \\ &\rightarrow f(x) = \frac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2} \\ &\rightarrow f(x) = \frac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2} \\ &\rightarrow f(x) = \frac{ax^2+x(2a+b)+2b+c}{x+2} \end{aligned}$$

$$\text{Par identification : } \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 - 2a = 5 \\ c = 1 - 2b = -9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{a = -1} \\ \mathbf{b = 5} \\ \mathbf{c = -9} \end{cases}$$

$$f(x) = -x + 5 - \frac{9}{x+2}$$

→ Par division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} -x^2+3x+1 & x+2 \\ +x^2+2x & -x+5 \\ \hline 5x+1 & \\ -5x-10 & \\ \hline -9 & \end{array}$$

$$\text{D'où : } f(x) = -x + 5 + \frac{(-9)}{x+2} \rightarrow f(x) = -x + 5 - \frac{9}{x+2}$$

d- Démontrons qu'il existe une asymptote horizontale :

Posons :  $y = -x+5$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ (-x+5) - \frac{9}{x+2} - (-x+5) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{9}{x} = 0$$

D'où la droite d'équation :  $y = -x+5$  est une asymptote oblique.

2) Déterminons le domaine de définition et calculons les limites aux bornes de  $D_f$  :



a)  $f(x) = x+1$   
**PDF Compressor Free Version**  
 $D_f = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$$

b)  $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$

$$D_f = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3\right) = +\infty$$

c)  $f(x) = \frac{1}{x}$

f existe si et seulement si:

$$x \neq 0 \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{ou} \quad D_f = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Donc la droite (D) :  $y = 0$  est asymptote horizontale

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Donc la droite (D) :  $x = 0$  est asymptote verticale.

d)  $f(x) = \frac{1}{x+1}$

f existe si et seulement si :  $x+1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad \text{ou} \quad D_f = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{-\infty} = 0$$

**PDF Compressor Free Version**

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow +\infty}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow +\infty}} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1^+} = +\infty$$

Donc la droite (D) :  $X = 0$  est asymptote verticale.

$$e) f(x) = \frac{x-2}{x-3}$$

f existe si et seulement si :  $x-3 \neq 0 \rightarrow x \neq 3$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{ 3 \} \text{ ou } D_f = ]-\infty ; 3[ \cup ]3 ; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x}\right) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x}\right) = \frac{1}{1} = 1$$

Donc la droite (D) :  $y = 1$  est asymptote horizontale.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{3-2}{0^-}\right) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{3-2}{0^+}\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Donc la droite (D) :  $X = 3$  est asymptote vertical.

$$f) f(x) = \frac{-x^3+x^2+1}{x+1}$$

f existe si et seulement si :  $x+1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{ -1 \} \text{ ou } D_f = ]-\infty ; -1[ \cup ]-1 ; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x^3}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^3}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \left(\frac{-(-1)^3+(-1)^2+1}{0^-}\right) = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \left(\frac{-(-1)^3+(-1)^2+1}{0^+}\right) = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$x \rightarrow -1^+$   
**PDF Compressor Free Version**  
 Donc la droite **(D) : X = -1** est asymptote verticale.

## II. notion de dérivée

**Définition :** Soit  $f$  une fonction

L'ensemble des nombres réels en les quels  $f$  est dérivable, est appelé *ensemble de dérivabilité*

La fonction  $x \rightarrow f'(x)$  est appelé dérivée (ou fonction dérivée) de  $f$

### 2.1. Dérivées des fonctions élémentaires

$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	Ensemble de dérivée
$f(x)$	$f'(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$F(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0 ; +\infty[$

**Exemple :**  $f(x) = 2 \rightarrow f'(x) = 0$

$$f(x) = 2x \rightarrow f'(x) = 2$$

$$f(x) = x^4 \rightarrow f'(x) = 4x^{4-1} = 4x^3$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \times 2x = x \rightarrow f'(x) = x$$

## PDF Compressor Free Version

### 2.2. Dérivée et opération sur les fonctions

Fonction mère	Dérivée
$F(x)$	$F'(x)$
$k.U(x), k \in \mathbb{R}^*$	$k.U'(x) \quad k \in \mathbb{R}^*$
$U(x) + V(x)$	$U'(x) + V'(x)$
$U(x) \times V(x)$	$U'(x)V(x) + V'(x)U(x)$
$\frac{1}{U(x)}$	$\frac{-U'(x)}{U(x)^2}$
$\frac{U(x)}{V(x)}$	$\frac{U'V - V'U}{V^2}$
$U(x)^n$	$nU' \cdot U^{n-1}$
$\sqrt{U(x)}$	$\frac{U'}{2\sqrt{U}}$

### Exercice d'application

Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de dérivabilité puis calculer la fonction dérivée

- a)  $f(x) = -x$
- b)  $f(x) = 2x^2$
- c)  $f(x) = \frac{-3}{x}$
- d)  $f(x) = 2\sqrt{x}$
- e)  $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$
- f)  $f(x) = 2x^4 + \frac{4}{3}x^3 - x^2 + 3$
- g)  $f(x) = \frac{1}{x+2}$
- h)  $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$
- i)  $f(x) = \frac{3x}{x+2}$
- j)  $f(x) = \frac{3x^2-2x+1}{x-2}$
- k)  $f(x) = \frac{x+1}{2-x}$
- l)  $F(x) = (x+1)^6$
- m)  $F(x) = (x^2-2)^3$

### Solution

a)  $f(x) = -x \quad D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = -1$

b)  $f(x) = 2x^2$   $D_f = \mathbb{R}$   
**PDF Compressor Free Version**  
 $f'(x) = 4x$

c)  $f(x) = \frac{-3}{x}$   $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = -3 \times \left(\frac{1}{x}\right)' \rightarrow f'(x) = \frac{3}{x^2}$$

d)  $f(x) = 2\sqrt{x}$   $D_f = [0; +\infty[$

$$f'(x) = 2 \times (\sqrt{x})'$$

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

e)  $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$   $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = (2x^2)' - (3x)' - (5)'$$

$$f'(x) = 4x - 3$$

f)  $2x^4 + \frac{4}{3}x^3 - x^2 + 3$   $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = (2x^4)' + \left(\frac{4}{3}x^3\right)' - (x^2)' + (3)'$$

$$f'(x) = 8x^3 + 4x^2 - 2x$$

g)  $f(x) = \frac{1}{x+2}$   $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$$U = x+2 \rightarrow U' = 1$$

$$f'(x) = \frac{-1}{U^2} \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}$$

h)  $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$   $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

$$U = x^2 - 1 \rightarrow U' = 2x$$

$$f'(x) = \frac{-U'}{U^2} \rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

i)  $f(x) = \frac{3x}{x+2}$   $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$$U = 3x \rightarrow U' = 3$$

$$V = x+2 \rightarrow V' = 1$$

$$f'(x) = \frac{U'V - V'U}{V^2}$$

$$f'(x) = \frac{3(x+2) - 1(3x)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6}{(x+2)^2}$$

j)  $f(x) = \frac{3x^2-2x+1}{(x-2)^2}$   $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$U = 3x^2-2x+1 \rightarrow U' = 6x-2$$

$$V = x-2 \rightarrow V' = 1$$

$$f'(x) = \frac{U'V-V'U}{V^2}$$

$$f'(x) = \frac{(6x-2)(x-2)-1(3x^2-2x+1)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x^2-12x-2x-2x+4-3x^2+2x-1}{(x-2)^2} \rightarrow f'(x) = \frac{3x^2-12x+3}{(x-2)^2}$$

k)  $f(x) = \frac{x+1}{2-x}$   $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$U = x+1 \rightarrow U' = 1$$

$$V = 2-x \rightarrow V' = -1$$

$$f'(x) = \frac{U'V-V'U}{V^2}$$

$$f'(x) = \frac{1(2-x)-(-1)(x+1)}{(2-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2-x+x+1}{(2-x)^2} \rightarrow f'(x) = \frac{3}{(2-x)^2}$$

l)  $f(x) = (x^2-2)^3$   $D_f = \mathbb{R}$

$$\text{Posons: } U = x^2-2 \rightarrow U' = 2x$$

$$f'(x) = (U^n)' = nU'U^{n-1}$$

$$f'(x) = 3 \times (2x) \times (x^2-2)^2 \rightarrow f'(x) = 6x(x^2-2)^2$$

## 2. 3. Dérivée et application

### a- Sens de variation d'une fonction

Pour déterminer le sens de variation d'une fonction, nous déterminons le signe de la dérivée sur l'ensemble de définition :

- ✓ Si  $f'(x)$  est positive sur une partie(ou l'intégralité) de l'ensemble alors  $f$  est croissante (Strictement croissante).
- ✓ Si  $f'(x)$  est négative sur une partie de cet ensemble (ou l'intégralité), alors  $f$  est décroissante (strictement décroissante) sur cet ensemble.
- ✓ Si  $f'$  est nulle alors, on dit que  $f$  est constante.

**Remarque :** Etudier les variations d'une fonction revient à dresser le tableau de signe et le tableau de variation.

Exemple : Etudier les variations des fonctions suivantes :

a)  $f(x) = x^3-3x-1$

b)  $f(x) = 2x^2-x+4$

c)  $f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x-2}$   
d)  $f(x) = \frac{1}{x}$

PDF Compressor Free Version

### Solution

- a)  $f(x) = x^3 - 3x - 1$   $D_f = \mathbb{R}$   
 $f'(x) = 3x^2 - 3 \rightarrow f'(x) = 3(x^2 - 1) \rightarrow f'(x) = 3(x-1)(x+1)$   
posons  $f'(x) = 0 \rightarrow 3(x-1)(x+1) = 0 \rightarrow x = 1$  ou  $x = -1$

Tableau de variation

X	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
x+1	-	+	+	
x-1	-	-	+	
f'(x)	+	-	+	
f(x)	$-\infty$	$f(-1)=1$	$f(1)=-3$	$+\infty$

$\forall x \in ]-\infty ; -1[ \cup [1 ; +\infty[ , f'(x) > 0$  d'où f est croissante sur  $]-\infty ; -1[ \cup [1 ; +\infty[$  ;

$\forall x \in ]-1 ; 1[ , f'(x) < 0$  d'où f est décroissante sur  $]-1 ; 1[$ .

- b)  $f(x) = 2x^2 - x + 4$   $D_f = \mathbb{R}$   
 $f'(x) = 4x - 1 ; f'(x) = 0 \rightarrow 4x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{4}$

Tableau de variation

X	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f'(x) = 4x - 1$	-	+	
f(x)	$+\infty$	$f(\frac{1}{4})$	$+\infty$

$\forall x \in ]-\infty ; \frac{1}{4}[ , f'(x) < 0$  d'où f est décroissante sur  $]-\infty ; \frac{1}{4}[$  ;

$\forall x \in ]\frac{1}{4} ; +\infty[ , f'(x) > 0$  d'où f est croissante sur  $]\frac{1}{4} ; +\infty[$ .

- c)  $f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x-2}$   $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Calcul de la dérivée :  
**PDF Compressor Free Version**

$$U = 3x^2 - 2x + 1 \rightarrow U' = 6x - 2$$

$$V = x - 2 \rightarrow V' = 1$$

$$f'(x) = \frac{U'V - V'U}{V^2} \rightarrow f'(x) = \frac{(6x-2)(x-2) - (6x-2)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x^2 - 20x + 6}{(x-2)^2}$$

$\forall x \in D_f, (x-2)^2 > 0$  donc  $f'$  est du signe du numérateur

$$6x^2 - 20x + 6 = 0 \rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$\Delta' = (5)^2 - 9 \rightarrow \Delta' = 16$$

$$\Delta' = 4^2$$

$$X_1 = \frac{5-4}{3} = \frac{1}{3}; \text{ et } X_2 = \frac{5+4}{3} = 3$$

$$f'(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-3)$$

Tableau de variation

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	2	3	$+\infty$
$x - \frac{1}{3}$	-	+		+	
$x-3$	-	-		-	+
$f'(x)$	+	-		-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f\left(\frac{1}{3}\right)$		$f(3)$	$+\infty$

$\forall x \in ]-\infty; \frac{1}{3}[ \cup ]3; +\infty[, f'(x) > 0$  d'où  $f$  est croissante sur  $]-\infty; \frac{1}{3}[ \cup ]3; +\infty[$  ;

$\forall x \in ]\frac{1}{3}; 2[ \cup ]2; 3[; f'(x) < 0$  d'où  $f$  est décroissante sur  $] \frac{1}{3}; 2[ \cup ]2; 3[$

d)  $f(x) = \frac{1}{x} \quad D_f = \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$\forall x \in D_f, \frac{-1}{x^2} < 0$  d'où  $f$  est strictement décroissante.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	0		0



**b- Détermination d'une équation de la tangente au point d'abscisse  $x_0$**

La courbe d'une fonction peut atteindre en un point  $M_0$  d'abscisse  $x_0$  une tangente dont l'équation est donnée par :

$$(T) : y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

**Exemple :** Soit  $f(x) = x^2+2x+3$

- a) Calculer la dérivée de  $f(x)$
- b) Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 3

**Solution**

- a) Calcul de la dérivée  
 $f'(x) = 2x+2$
- b) Une équation de la tangente au point d'abscisse 3

$$(T) : y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$X_0 = 3 \rightarrow f'(3) = 2 \times 3 + 2 \quad f'(3) = 8 \text{ et } f(3) = 3^2 + 2 \times 3 + 3 = 18$$

$$\text{Donc : } (T) : y = 8(x-3) + 18$$

$$Y = 8x-24+18 \quad (T): y = 8x-6$$

**2. 4. Dérivées successives**

Une fonction peut être dérivée plusieurs fois. La première dérivée de  $f$  est  $f'$ . La 2<sup>ème</sup> dérivée de  $f$  est  $f''$  ; la 3<sup>ème</sup> dérivée de  $f$  est  $f'''$  ou  $f^3$ . La  $n$ -ième dérivée de  $f$  est  $f^n$ .

**Exemple :** Calculer les trois premières dérivées des fonctions suivantes :

- a)  $f(x) = 3x^2-2x+1$
- b)  $g(x) = 3x^3-6x^2+x-3$

**Solution**

- c)  $f(x) = 3x^2-2x+1$   
 $f'(x) = 6x-2+0$   
 $f''(x) = 6$   
 $f'''(x) = 0$
- d)  $g(x) = 3x^3-6x^2+x-3$   
 $g'(x) = 9x^2-12x+1$   
 $g''(x) = 18x-12$   
 $g^3(x) = 18$   
 $g^4(x) = 0$

**III. étude de fonction**

**A- parité :**

Une fonction est dite paire si et seulement si son ensemble de définition est symétrique par rapport à O.

**PDF Compressor Free Version**  
 $\forall x \in D_f : f(x) = f(-x)$   
**Exemple:**  $f(x) = x^2 + 1$

$$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1$$

Donc la fonction  $f$  est paire.

Une fonction est dite impaire si son ensemble de définition est symétrique par rapport à  $O$  et  $\forall x \in D_f : f(-x) = -f(x)$

## 2- Centre de symétrie

Pour démontrer qu'un point  $A\left(\frac{a}{b}\right)$  est centre de symétrie, il suffit de démontrer

$$\text{que : } \frac{f(a-h) + f(a+h)}{b} = 2 \Leftrightarrow f(a-h) + f(a+h) = 2b$$

## 3- Axe de symétrie

Pour démontrer qu'une droite  $X = a$  est axe de symétrie alors il suffit juste de prouver que :  $f(a-h) = f(a+h)$

## B. fonction logarithme népérien

**Définition :** On appelle fonction logarithme népérien, la fonction notée  $\ln x$  définie sur  $]0 ; +\infty[$ , qui s'annule en 1.

## Propriété fondamentale de la fonction logarithme

La fonction logarithme népérien est caractérisée par trois propriétés fondamentales qui sont:

- Son domaine de définition  $]0 ; +\infty[$
- $\ln(1) = 0$  (racine évidence)
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$  (dérivée)

### a) Ensemble de définition de fonction composé avec $\ln$ : $\ln U$

La fonction  $\ln U$  existe si et seulement si  $U$  existe et  $U > 0$

**Exemple :** Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition de la fonction  $f$ .

- $F(x) = \ln(4x-8)$
- $c) h(x) = \ln\left(\frac{x-2}{3x+9}\right)$
- $G(x) = \ln(-3x+4)$
- $d) k(x) = \ln(x^2-3x+4)$

### Solution

a)  $F(x) = \ln(4x-8)$   $f(x)$  existe si et seulement si  $4x-8 > 0 \rightarrow x > 2$

$$D_f = ]2 ; +\infty[$$

b)  $g(x) = \ln(-3x+4)$   $g(x)$  existe si et seulement si  $-3x+4 > 0 \rightarrow -3x > -4 \rightarrow 3x < 4 \rightarrow x < \frac{4}{3}$

$$D_g = ]-\infty ; \frac{4}{3}[$$

c)  $h(x) = \ln\left(\frac{x-2}{3x+9}\right)$  f(x) existe si et seulement si  $\frac{x-2}{3x+9} > 0$  et  $3x+9 \neq 0$

$$x-2 = 0 \rightarrow x = 2 \quad ; \quad 3x+9 \neq 0 \rightarrow x \neq -3$$

X	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$3x+9$	-		+	+
$x-2$	-		-	+
$\frac{x-2}{3x+9}$	+		-	+

$$D_h = ]-\infty; -3[ \cup ]2; +\infty[$$

d)  $k(x) = \ln(x^2-3x+4)$  k(x) existe si et seulement si :  $x^2-3x+4 > 0$

$$x^2-3x+4 = 0 \quad a = 1; b = -3; c = 4 \rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(1)(4) = 9 - 16 = -7 < 0$$

Alors le signe est celui de a ;  $a > 0$  on en déduit que  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2-3x+4 > 0$  ;  $D_k = \mathbb{R}$

### b) Variation de ln et ses conséquences

**Variation :** La fonction ln étant définie sur  $]0; +\infty[$  et ayant pour dérivée  $\left(\frac{1}{x}\right)$  une fonction strictement croissante.

Conséquences :  $\forall a, b \in \mathbb{R}^*$ , on a :

- Si  $a = b \leftrightarrow \ln a = \ln b$
- Si  $a > b \leftrightarrow \ln a > \ln b$
- Si  $a < b \leftrightarrow \ln a < \ln b$

Cas particulier :

- Si  $a < 1 \rightarrow \ln a < \ln 1$  or  $\ln 1 = 0$  alors  $\ln a < 0$
- Si  $a > 1 \rightarrow \ln a > \ln 1$  or  $\ln 1 = 0$  alors  $\ln a > 0$

### c) Le nombre e

$$\ln e = 1 \quad ; \quad e \approx 2.718 \quad ; \quad \ln x = 1 \rightarrow x = e^1 = e \quad ; \quad \ln e^x = x$$

### d) Propriétés algébriques

$\forall a \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\forall b \in \mathbb{R}_+^*$ , on a :

- $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^n) = n \ln a$

Ecrire plus simplement :

- $\ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln 2 - \ln 3$
- $\ln(2\sqrt{2}) = \ln 2 + \ln \sqrt{2} \rightarrow \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2$
- $\ln 4 = \ln 2^2 = 2 \ln 2$

## e) Equations et Inéquation comportant ln

### 1. Equations :

Pour résoudre les équations comportant ln, il faut :

- ✓ Déterminer la condition d'existence de l'inéquation
- ✓ Utiliser les propriétés algébriques des fonctions ln pour en déduire une équation plus simple.

#### • Equation du type $\ln U = k$

- a)  $\ln(2x+6) = 0$
- b)  $\ln(3x+2) = 5$
- c)  $\ln x + 2 = 3$
- d)  $\ln(x+2) = 0$
- e)  $\ln(x^2 - 3x + 4)$
- f)  $\ln x = -3$

#### Solution

- a)  $\ln(2x+6) = 0$  cette équation existe si  $2x+6 > 0 \rightarrow 2x > -6 \rightarrow x > -3 \rightarrow x \in ]-3 ; +\infty[$

$$\ln(2x+6) = 0 \rightarrow \ln(2x+6) = \ln 1 \rightarrow 2x+6 = 1 \rightarrow 2x = -5 \rightarrow x = \frac{-5}{2} \in ]-3 ; +\infty[$$

$$S = \left\{ \frac{-5}{2} \right\}$$

- b)  $\ln(3x+2) = 5$  cette équation existe si  $3x+2 > 0 \rightarrow 3x > -2 \rightarrow x > \frac{-2}{3} \rightarrow x \in \left] \frac{-2}{3} ; +\infty[ \right.$

$$\ln(3x+2) = 5 \rightarrow e^{\ln(3x+2)} = e^5 \rightarrow 3x+2 = e^5 \rightarrow 3x = e^5 - 2 \rightarrow x = \frac{e^5 - 2}{3} \rightarrow x \in \left] \frac{-2}{3} ; +\infty[ \right.$$

$$S = \left\{ \frac{e^5 - 2}{3} \right\}$$

#### • Equation du type $\ln U = \ln V$

Résoudre dans chacun des cas suivants les équations :

- a)  $\ln(x+1) = \ln(2x-2)$
- b)  $\ln(x+3) = \ln(-x-7)$
- c)  $\ln(x-1) + \ln(x+1) = 0$
- d)  $\ln(2x-2) + \ln(2x+2) = \ln 3$

#### Solution

- a)  $\ln(x+1) = \ln(2x-2)$  cette équation existe si  $x+1 > 0$  et  $2x-2 > 0 \rightarrow x > -1$  et  $x > 1$   
 $\rightarrow x \in \left] \frac{-2}{3} ; +\infty[ \right.$

- b)  $\ln(x+3) = \ln(-x-7)$  cette équation existe si  $x+3 > 0$  et  $-x-7 > 0 \rightarrow x > -3$  et  $x < -7$   
 L'équation n'a pas de solution

#### • Utilisation d'inconnu Auxiliaire

Pour résoudre les équations du types :  $a(\ln x)^2 + b(\ln x) + c = 0$  . On procède par changement de variable en posant :  $X = \ln x$

On se ramène ainsi à une du 2<sup>nd</sup> degrés.

Exemple : Résoudre dans chacun des cas suivants les équations suivantes :

- $\ln^2 x + 5\ln x - 6 = 6$
- $\ln^4 - \ln^2 x = 0$
- $\ln^2 x + \ln x + 12 = 0$
- $\ln^3 + \ln^2 x + 2\ln x = 0$

### Exercice d'application

On considère le polynôme  $P$  défini par :  $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

- 1- Calculer  $P(-1)$
- 2- Ecrire  $P(x)$  sous forme d'un produit de deux polynômes
- 3- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations :
  - a-  $P(x) = 0$
  - b-  $(\ln x)^3 + 2(\ln)^2 - 5\ln x = 6$

## 2. Les Inéquations

Résoudre les inéquations comportant  $\ln$  revient à utiliser le même procédé que la précédente partie :

- ✓ Déterminer le domaine d'existence
- ✓ Ramener sous forme  $\ln a < \ln b$

### b<sub>1</sub>- Les inéquations de type $\ln U > k$ ou $\ln U < k$

Exemple :  $\ln(2x+6) < 0$  ;  $\ln(2x+6) > 0$  ;  $1 - \ln(x) > 0$  ;  $\ln(3x+2) \leq 5$

### b<sub>2</sub>- Inéquations du type $\ln U < \ln V$ ou $\ln U > \ln V$

Exemple :  $\ln(3x+6) < \ln(2x-1)$  ;  $\ln x + \ln(x+1) < \ln x$  ;  $\ln(2x+6) < \ln(-x-1)$  ;  $\ln(4x-3) < \ln(x+1)$

### B<sub>3</sub>- Utilisation d'inconnu Auxiliaire

Exemple :  $-4\ln^2 x + 8\ln x - 4$  ;  $-\ln^3 + \ln^2 + 2\ln x \leq 0$

## f) Représentation graphique

### 1- Limites de référence de la fonction $\ln$

$$*\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty ;$$

$$*\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty ;$$

$$*\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0 ;$$

$$*\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x}{x-1}\right) = 1 ;$$

$$*\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right) = 1$$

**Exemple :** Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(4x+5) ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x + \ln x]$$

## 3- Dérivée

La dérivée de la fonction  $\ln(x)$  est  $\frac{1}{x}$

- Détermination de la dérivée d'une fonction composée avec  $\ln$  : la dérivée d'une fonction composé avec  $\ln$  est  $(\ln U)' = \frac{U'}{U}$

**Exemple :** Dans chacun des cas suivants déterminer la dérivée de  $f$  puis dresser son tableau sur son  $D_f$  :

a)  $f(x) = \ln(x+1)$

b)  $g(x) = 2x + \ln(x+2)$

c)  $h(x) = \ln(4x+3)$   
**PDF Compressor Free Version**  
**Solution**

a)  $f(x) = \ln(x+1)$

$$f'(x) = \frac{u'}{u}$$

$$f'(x) = [\ln(x+1)]'$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)'}{(x+1)} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{(x+1)}$$

b)  $g(x) = 2x + \ln(x+2)$

$$g'(x) = [2x + \ln(x+2)]'$$

$$g'(x) = 2 + \frac{(x+2)'}{(x+2)}$$

$$g'(x) = 2 + \frac{1}{x+2}$$

c)  $h(x) = \ln(4x+3)$

$$h'(x) = [\ln(4x+3)]'$$

$$h'(x) = \frac{(4x+3)'}{(4x+3)}$$

$$h'(x) = \frac{4}{4x+3}$$

#### 4- Représentation graphique de la fonction ln

Récapitulatif :

$$D_f = ]0 ; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$x \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

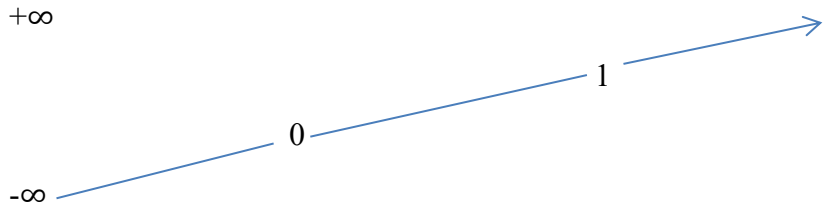
$$x \rightarrow +\infty$$

**Dérivée :**  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

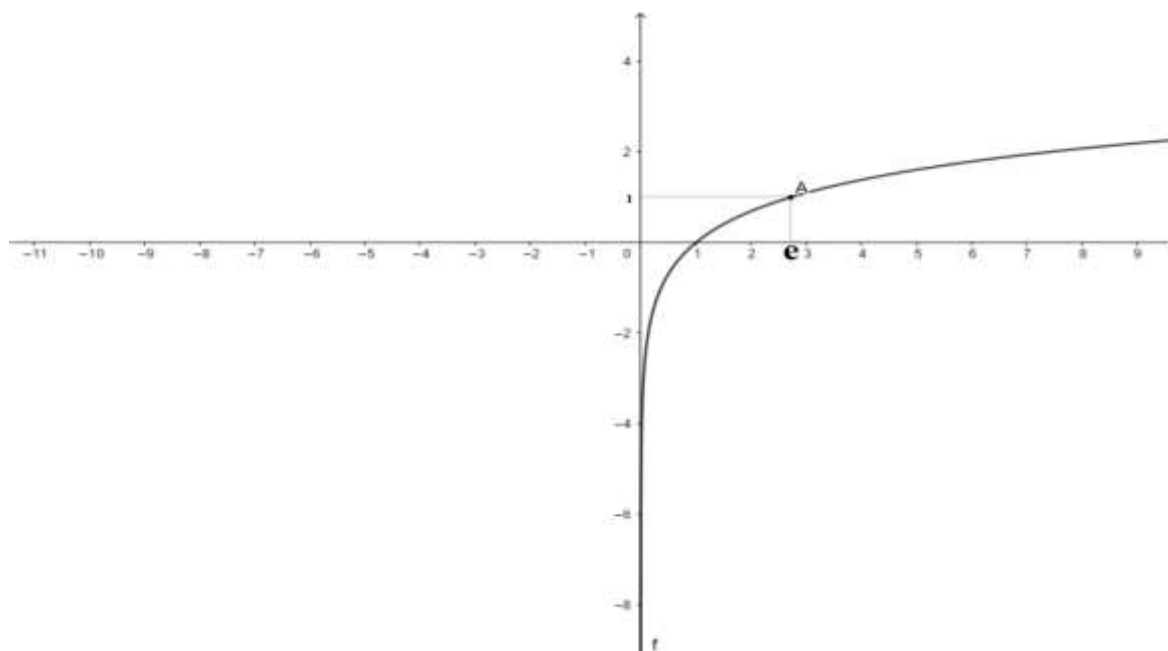
**Variation :**  $\frac{1}{x} > 0$  alors la fonction  $\ln x$  est strictement croissante

**Asymptote :** la droite (D) :  $X = 0$  est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction  $\ln x$ .

Les points clés :  $\ln x = 0 \rightarrow x = 1$  ;  $\ln e = 1$

X	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	+	+
$f(x)$				

Courbe représentative :



## C. fonction exponentielle

### 1- définition et propriété

**Définition :** On appelle fonction exponentielle népérienne la bijection réciproque de la fonction logarithme népérienne. Elle est définie sur  $\mathbb{R}$  et est notée :  $\text{Exp}(x)$  ou  $e^x$

Elle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée est  $(e^x)' = e^x$

**Propriété :**  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, e^x = y \rightarrow x = \ln y$$

**Exemple :**  $e^x = 2 \rightarrow x = \ln 2$  ;  $e^x = 3 \rightarrow x = \ln 3$

$e^x = -1 \rightarrow$  impossible ;  $e^x = 0 \rightarrow$  impossible

### a- Domaine de définition d'une fonction composée avec exponentielle

**PDF Compressor Free Version**

La fonction  $e^U$  existe si et seulement si la fonction  $U$  existe.

**Exemple :** Déterminer le domaine de définition de :

a)  $f(x) = e^{x^2+1}$  ;      b)  $g(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$  ;      c)  $h(x) = e^{-x}$

### b- Variation et conséquences

La fonction exponentielle est strictement croissante.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

$$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

$$e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$$

### c- Propriétés algébriques

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ , et  $r \in \mathbb{Q}$ , on a :

1)  $e^a e^b = e^{a+b}$

2)  $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

3)  $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$

4)  $(e^a)^r = e^{ra}$

## IV. Equation – Inéquations

### a- Equations

Résoudre les équations comportant exponentielles revient à utiliser les propriétés algébriques et la propriété  $e^x = y \rightarrow x = \ln y$

**Exemple :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , les équations et inéquations :

1-  $e^{x+1} = 2$

2-  $e^{x+3} = 6$

3-  $e^{2x} = 4$

4-  $e^{2x+1} = 2$

5-  $e^{x+3} = e^{2x-4}$

6-  $e^{x+3} = e^{2x-4}$

7-  $e^{x^2} = e$

8-  $e^{x^2} = e^{x+2}$

### b. inéquations

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

1)  $e^x > 2$       4)  $e^{x+1} < e$

2)  $e^{x+1} < 1$       5)  $2e^x < 1$

3)  $e^{x+1} > e^{2x-2}$       6)  $e^{x^2} \geq 6$

### c. Equations- Inéquations polynômiales

Ce sont les équations et inéquations du type :  $ae^{2x} + be^x + c = 0$ ;  $ae^{2x} + be^x + c \geq 0$

Pour résoudre ces types d'équations, on procède à un changement de variable en posant

$X = e^x$ . Ce changement de variable nous permet de les ramener sous la forme des équations et inéquations du 2<sup>nd</sup> degré.

**Exemple :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :



- a)  $e^{2x} - e^x - 6 = 0$
- b)  $e^x + e^{-x} - 2 = 0$
- c)  $e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$
- d)  $e^{2x+2} + e^{x+1} - 2 = 0$
- e)  $e^{2x} - e^x - 6 \geq 0$
- f)  $e^{2x} + e^x - 2 \leq 0$

### Exercice d'application

Soit  $P(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$

- a) Calculer  $p(-1)$
- b) Déterminer les réels a, b et c tels que  $p(x) = (x+1)(ax^2+bx+c)$
- c) Résoudre  $p(x) = 0$
- d) En déduire les solutions de  $2e^{2x} - e^x - 5 - 2e^{-x} = 0$

## V. étude graphique de la fonction exponentielle

### a- Dérivée de la fonction exponentielle

Soit  $f(x) = e^x$ . La dérivée de la fonction f est :  $f'(x) = e^x$

### b- Dérivée de la fonction composée

Soit  $g(x) = e^{U(x)}$

La dérivée de la fonction composée g est  $g'(x) = U'(x)e^{U(x)}$

**Exemple :** Dériver les fonctions suivantes :

- a)  $F(x) = e^{-x}$
- b)  $F(x) = e^{4x}$
- c)  $f(x) = e^{x^2+1}$
- d)  $f(x) = e^{x^2+2x-1}$

### c- Etude des limites

→ Limites de référence

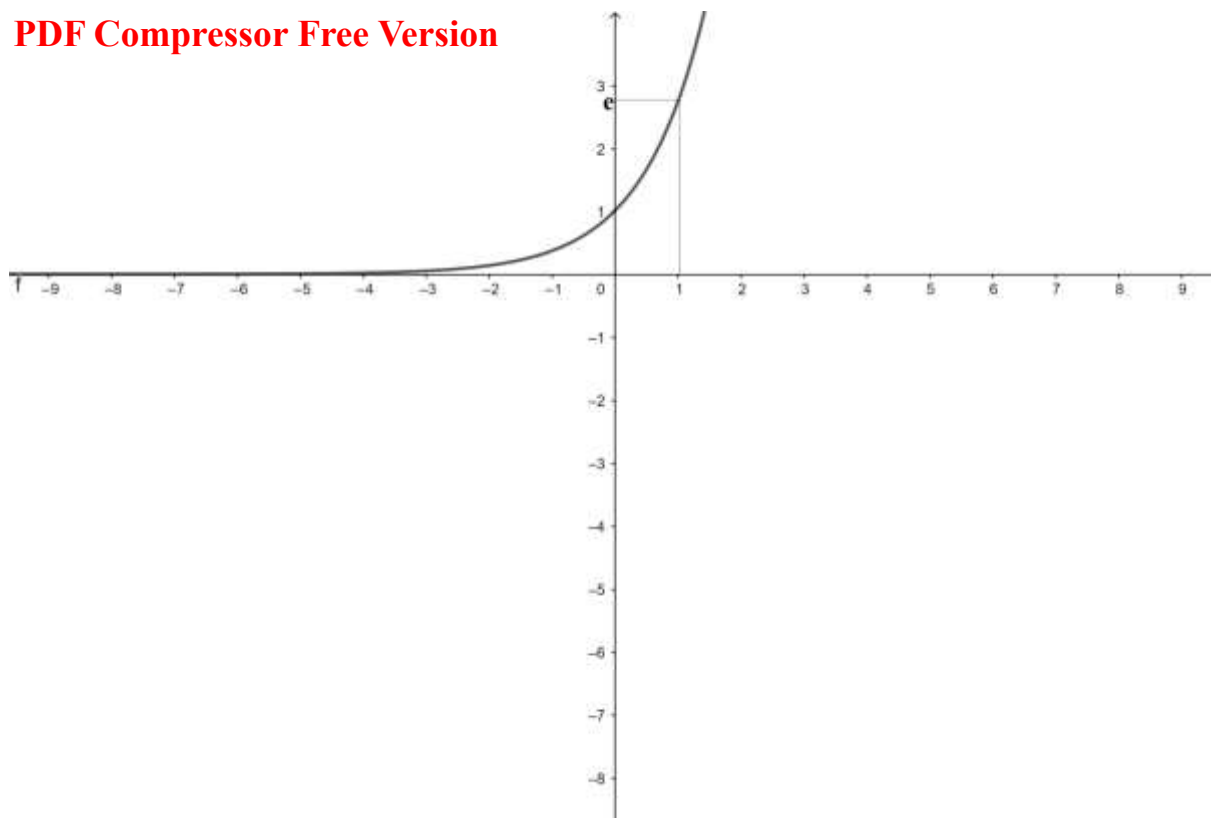
$$\begin{array}{lllll} * \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty ; & * \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 ; & * \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right) = +\infty ; & * \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = 0 ; & * \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \end{array}$$

→ Graphe de la fonction exponentielle

Tableau de variation

X	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$(e^x)'$	+			
$e^x$				

**PDF Compressor Free Version**



# CHAPITRE 3 : PROBABILITE

## PDF Compressor Free Version

### I. dénombrement

#### a- cardinal d'un ensemble

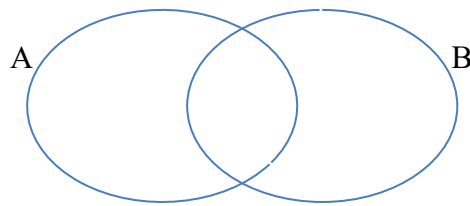
**Définition :** Le cardinal d'un ensemble est le nombre d'éléments que contient cet ensemble.

**Exemple :** Soit  $E = \{1, 2, a, b, \alpha, \beta\} \rightarrow \text{Card}E = 6$

$$\text{Card}TA_4 = 53 \text{ élèves}$$

#### b- Réunion de deux Ensembles

On appelle réunion de deux ensembles A et B notée  $A \cup B$ . L'union des cardinaux des ensembles A et B.  $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}A + \text{Card}B$ .

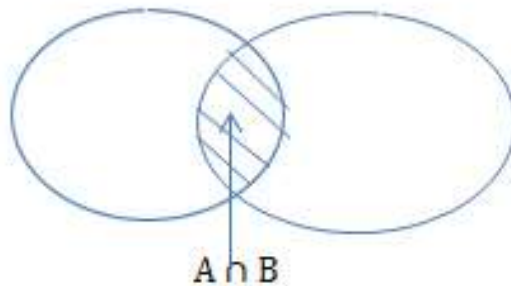


**Exemple :** Soit  $A = \{1, 2, 3, b\}$  et  $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, b, \alpha, \beta, \gamma\}$$

#### c- Intersection de deux ensembles

On appelle l'intersection de deux ensembles, l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'ensemble A et à l'ensemble B. On la note  $A \cap B$ .



**Exemple :** Soit  $A = \{1 ; 2 ; a ; b ; \alpha ; \beta\}$

$$B = \{4 ; a ; \beta ; \gamma\}$$

$$A \cap B = \{a ; \beta\}$$

On a plus généralement :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}A + \text{Card}B - \text{Card}(A \cap B)$$

### Exercice d'application

#### PDF Compressor Free Version

Dans un groupe d'individus, 45 aiment le cinéma, 30 le sport, et 10 à la fois le sport et le cinéma. Calculer le nombre d'individus dans ce groupe.

### Exercice d'application 2

On interroge 50 enfants à propos du sport qu'ils pratiquent : 25 pratiquent le football ; 22 le tennis et 16 le basketball. 5 pratiquent les 3 sports, 12 pratiquent le foot et le basket. 8 pratiquent le tennis et le basket et 7 pratiquent le tennis et le football.

Peut-on affirmer que chacun de ces enfants pratiquent au moins un de ces sports ?

Déterminer le nombre :

- a) Qui pratiquent uniquement le football
- b) Qui ne pratiquent pas le football.
- c) Qui pratiquent le tennis et le basket, mais ne pratiquent pas le football.

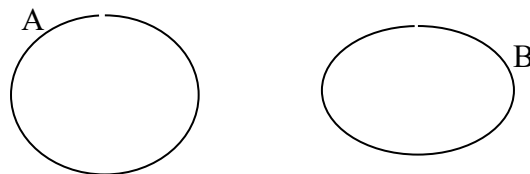
#### d- Complémentaire d'un Ensemble

Deux ensembles A et  $\bar{A}$  sont complémentaires lorsque l'union (réunion) des deux forment un seul ensemble E.  $\text{Card}E = \text{Card}A + \text{Card}\bar{A}$ .

#### e- Ensemble disjoints

Deux ensembles A et B sont disjoints lorsque les éléments de A n'appartiennent pas à B.

$$\text{Card}(A \cap B) = 0$$



## II. Outils d'Analyse Combinatoire

### a- Arbre de décision

Exemple<sub>1</sub>: un buffet est composé de 3 entrées; 5 résistances et 4 desserts.

Combien de plats différents comportant une entrée, une résistance et un dessert peut-on former ? Utiliser l'arbre de décision.

Exemple<sub>2</sub>: Une femme a dans sa garde-robe deux jupes, 3 chemises et de vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste. Déterminer à l'aide d'un arbre le nombre de manières différentes de s'habiller en utilisant un arbre de décision.

### b- Tableau à double Entrée

Un tableau à double entrée est un tableau qui permet d'avoir un résultat composé de deux éléments appartenant à deux ensembles différents.  $A \times B$  est l'ensemble des éléments (a, b) où  $a \in A$  et  $b \in B$ .

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}A \times \text{Card}B.$$

Exemple: 8 amis vont à une soirée et devaient être accompagnés chacun de son épouse. A la dernière minute, une des femmes est indisponible et ne peut accompagner son mari.

A l'ouverture de la soirée, ils forment des couples pour danser.

- a) Combien de possibilités a-t-on de former des couples ?
- b) Combien a-t-on de possibilité de former des couples tels qu'aucun homme ne danse avec sa femme ?

### c- P-uplet ou p-liste

Soit E un ensemble non vide ayant n éléments, p un entier naturel non nul. Une p-liste ou

p-uplet d'élément de E est une suite de p élément de E.

Le nombre de p-liste de E est  $n^p$ .

Dans le cadre usuel, un p-liste se traduit par un tirage successif avec remise de p objets parmi n objets.

Exemple<sub>1</sub> : Combien y a-t-il de numéro de téléphone à 8 chiffres commençant par un 6 ?

Exemple<sub>2</sub> : Au loto sportif, on coche l'une des trois cases du bulletin pour chacun des 18 matchs sélectionnés.

Quel est le nombre total de choix possible pour un jeu.

#### d- Arrangement

Soit E un ensemble non vide à n élément et p un entier naturel inférieur à n. Un arrangement de p éléments de E est une suite ordonnée de p élément de E tous ordonnés.

Le nombre d'arrangement est :  $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

Dans le cadre usuel, un arrangement se traduit par un tirage successif sans remise de p élément parmi n éléments.

Par convention :  $A_n^0 = 1$

Exemple : Une course de chevaux comporte 20 chevaux portant les numéros 1 à 20.

- Combien de tiercé dans l'ordre peut-on obtenir ?
- Combien de mot (ayant un sens ou non) de 5 lettres distincts peut-on former en utilisant les lettres de l'alphabet français ?
- Une urne contient 10 boules. On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne. Combien de résultats distincts peut-on obtenir ?

#### e- Permutation

Une permutation d'éléments E est une suite ordonnée de tous les éléments de E.

Une permutation de n éléments est :  $n! \quad A_n^n = n!$

$n!$  : factoriel de n.

Exemple : Combien y a-t-il de possibilité de faire asseoir 7 personnes sur 7 chaises ?

Combien d'anagrammes peut-on former avec les mots : TERMINALE ?

#### f- Combinaison

Soit E un ensemble de n élément et p un entier naturel tels que  $p \leq n$ .

Une combinaison de p éléments pris parmi n éléments est :

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

Dans le cadre usuel, une combinaison introduit la notion du tirage simultanée de p éléments parmi n éléments.

Exemple<sub>1</sub> : Déterminer le nombre de comité de 3 personnes que l'on peut élire dans une assemblée de 20 personnes.

Exemple<sub>2</sub> : On tire simultanément et au hasard 6 boules de 49 boules distinctes. Combien y a-t-il de résultat possible ?

→ **Principe de somme et produit** : Dans un jeu de 32 cartes, on choisit 5 cartes simultanément et au hasard (l'ensemble de ces 5 cartes est appelé mains).

Déterminer le nombre de main

- Total
- Qui contiennent exactement '3as'
- Qui contienne au moins '1as'

Solution

Données :  $n = 32$  cartes ;  $p = 5$  cartes

Déterminons :

a- Le nombre total est :  $C_{32}^5 = \frac{32!}{5!27!} = 201376$

b- Le nombre de mains qui contiennent exactement 3 as est :

$$C_4^3 \cdot C_{28}^1 = 1512$$

c- Le nombre de mains qui contiennent au moins un as est :

$$C_4^1 \cdot C_{28}^4 + C_4^2 \cdot C_{28}^3 + C_4^3 \cdot C_{28}^2 + C_4^4 \cdot C_{28}^1$$

D'une manière littérale, le mot 'ou' se traduit par une somme et le mot 'et' se traduit par un produit.

**Exemple :** On tire au hasard une main de 6 mains d'un jeu de 32 cartes.

- 1- Donner le nombre de mains total qu'on peut obtenir.
- 2- Donner le nombre de mains ayant exactement deux piques.
- 3- Donner le nombre de mains ayant 4 as.
- 4- Donner le nombre total de mains ayant au moins deux trèfles.

### III. probabilité

#### 3.1. Vocabulaire en Probabilité

**Expérience ou variable aléatoire :** C'est une expérience dont on ne peut prévoir l'issue avant qu'elle n'ait été complètement réalisée.

**Univers des possibilités :** L'ensemble de tous les résultats possibles à l'issue d'une expérience aléatoire.

**Événement :** C'est une partie de l'univers. C'est-à-dire l'ensemble des éventualités de l'expérience aléatoire.

**Événement certain :** C'est l'univers de l'expérience aléatoire c'est-à-dire l'événement qui est réalisé à l'issue de l'expérience. On le note souvent  $\Omega$ .

**Événement Impossible :** C'est un événement qui ne peut être réalisé à l'issue de l'expérience est noté  $\emptyset$ .

**Événement élémentaire :** C'est un événement n'ayant qu'une seule éventualité. Soient A et B deux événements d'une expérience aléatoire.

- On dit que A est inclus dans B ( $A \subset B$ ) si toute réalisation de A entraîne la réalisation de B.
- On note  $A \cap B$  l'événement intersection des événements A et B, et est l'événement pour lequel A et B sont à la fois.
- On note  $A \cup B$  l'événement réunion des événements A et B pour lequel l'événement A est réalisé ou B est réalisé.
- A et B sont deux événements incompatibles si  $A \cap B = \emptyset$ .
- On dit que A et B sont deux événements contraires si B est l'ensemble des éventualités pour lesquelles A n'est pas réalisé.  $B = \bar{A}$
- A et B sont indépendants si la réalisation de l'un n'influence pas la réalisation de l'autre.

**Exemple :** On lance un dé et on s'intéresse au numéro porté sur la face supérieure du dé.

- 1- Quel est le cardinal de l'univers  $\Omega$  ?
- 2- On note A l'événement obtenir 'un nombre pair'. Quel est le cardinal de A ?
- 3- On note B l'événement obtenir 'un nombre à deux chiffres'. Quel est le cardinal de B ?
- 4- 'C', est l'événement obtenir un nombre inférieur à 10. Quel est le cardinal de C ?
- 5- Définissez l'événement  $\bar{A}$  et donnez le cardinal de A.

Solution

- 1-  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \text{Card } \Omega = 6$

- 2-  $A = \{2, 4, 6\} \rightarrow \text{card}A = 3$   
 3- B est un événement impossible ;  $\text{Card}B = 0$ .  
 4- 'C', est un événement certain donc  $\text{Card}C = \text{Card}\Omega = 6$   
 5-  $\bar{A}$  est l'évènement obtenir un nombre impaire ; son cardinal est  $\text{Card}\bar{A} = 3$ .

Exemple<sub>2</sub> : 1-On tire simultanément et au hasard 4 jetons d'un sac opaque contenant 32 jetons indiscernable au toucher, numérotés de 1 à 32.

Soit  $\Omega$ , l'univers associé à cette épreuve. Calculer  $\text{Card}\Omega$ .

2-Soit A l'évènement obtenir exactement 3 jetons dot les numéros sont inférieurs ou égaux à 9. Calculer  $\text{Card}A$ .

3-Définir  $\bar{A}$  puis en déduire  $\text{Card}(\bar{A})$

### 3-2 Probabilité d'un évènement

Soit une expérience aléatoire dont l'univers est définie et est noté  $\Omega$ . En supposant que les évènements élémentaires sont équiprobables, la fréquence de réalisation de A est appelée la probabilité que l'évènement A soit réalisé est

$$P(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega} = \frac{\text{Nombre de cas favorable à la réalisation de A}}{\text{Nombre de Cas possibles}}$$

- La probabilité d'un évènement incertain est  $P(\emptyset) = 0$
- La probabilité d'un évènement Certain est  $P(\Omega) = 1$

## **PDF Compressor Free Version**

### **Bibliographie**

- ❖ CIAM terminale Littéraire, Edicef 2006
- ❖ Excellence en Mathématique Terminale A, S, E, NMI Education 2014



PDF Compressor Free Version

**Partenariat**

Lycée Saint François Xavier  
Label 109



**Livret à ne pas vendre**

**Contact**

info@label109.org

Télécharger gratuitement les applications et livres numériques sur le site:  
<http://www.tchadeducationplus.org>



Mobile et WhatsApp: 0023566307383



Rejoignez le groupe: <https://www.facebook.com/groups/tchadeducationplus>