BACCALAUREAT
SESSION 2018

Coefficient : 5
Durée : 4 *h*

MATHEMATIQUES

SERIE E

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux feuilles de papier millimétré.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.

EXERCICE 1

On pose $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \, dx$ et pour tout nombre entier naturel non nul n, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin 3x \, dx$.

1- a) Calculer I_0.

b) En utilisant une intégration par parties, calculer I_1.

2- a) En effectuant deux intégrations par parties successives, déterminer, lorsque $n \geq 1$, I_{n+2} en fonction de I_n.

b) Vérifier que : $I_3 = \frac{\pi^2}{108} - \frac{2}{27}$.

3- a) Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Justifier que, pour tout nombre entier naturel n non nul, $I_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \, dx$.

c) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 2

Le but de cet exercice est de déterminer la position du centre d'inertie G d'une plaque homogène P d'épaisseur négligeable.
Soit f la fonction numérique à variable réelle définie sur $[0 ; \pi]$ par $f(x) = 2x + \sin 2x$ et (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2cm.

La plaque P représente la portion du plan délimitée par la courbe (Cf), l'axe (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \pi$.

1- a) Etudier le sens de variation de f sur $[0 ; \pi]$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer la courbe (Cf) et ses tangentes aux points d'abscisses respectives 0, $\frac{\pi}{2}$ et π.

2- Démontrer que, l'aire exprimée en cm^2, de la plaque est égale à $4\pi^2$.

3- On admettra que les coordonnées du centre d'inertie G de la plaque sont données par :

$$x_G = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi} xf(x)\,dx \quad \text{et} \quad y_G = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi}\left(f(x)\right)^2 dx.$$

On pose $I = \int_0^{\pi} \sin^2(2x)\,dx$ et $J = \int_0^{\pi} x\sin(2x)\,dx$.

a) Vérifier que: $x_G = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{2}{3}\pi^3 + J\right)$ et $y_G = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{4}{3}\pi^3 + 4J + I\right)$

b) Calculer I. (on pourra utiliser la formule $\sin^2(t) = \frac{1-\cos 2t}{2}$)

c) En utilisant une intégration par parties, calculer J.

d) Déduire des questions 3.a),b) et c) les coordonnées du point G.

PROBLEME

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J). L'unité graphique est 1 cm.
On considère les points A, B, C et Ω d'affixes respectives 2 ; $-1+i\sqrt{3}$; $-1-i\sqrt{3}$ et -1.

Partie A

Soit (Γ) l'ellipse de centre Ω passant par les points A et B et dont l'axe focal est l'axe (OI).

1- Construire les points A, B, C et Ω.

2- *a)* Déterminer les foyers, les directrices et l'excentricité de (Γ).

b) Déterminer une équation cartésienne de (Γ) dans le repère (O, I, J).

c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (Γ) avec l'axe (OJ).

3- Tracer (Γ) dans le repère (O, I, J).

Partie B

On désigne par s la similitude de centre A, de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et par h l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$.
Soit E l'image du point C par h.

1- a) Démontrer que le triangle ABC est un triangle équilatéral de sens direct.

b) Démontrer que s(E) = B.

c) Construire les points F et K tels que s(C) = F et s(B) = K.

2- Le cercle circonscrit au triangle BCE recoupe la droite (AB) en un point G et le cercle circonscrit au triangle BFK recoupe la droite (AK) en un point D.

a) Construire les points G et D.

b) Démontrer que s(G) = D.

3- Soit $S_{(OA)}$ la symétrie orthogonale d'axe (OA).

a) Démontrer que $S_{(OA)}(E) = G$

b) Justifier que h(B) = G

c) Démontrer que le triangle ABD est équilatéral de sens indirect.

4- Démontrer que le quadrilatère ADBC est un losange.

5- Démontrer que l'image du triangle DBA par h^{-1} est le triangle KAF (où h^{-1} est la réciproque de h).