

BACCALAUREAT
SESSION 2020

Coefficient : 5
Durée : 4 H

MATHÉMATIQUES

SERIE E

*Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1/2 et 2/2.
Chaque candidat recevra une (01) feuille de papier millimétré.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.*

EXERCICE 1

Soit ABC un triangle du plan.

1. a) Déterminer et construire le point G, barycentre des points pondérés (A, 1) ; (B, -1) et (C, 1).
b) Déterminer et construire le point G', barycentre des points pondérés (A, 1) ; (B, 5) et (C, -2).
2. Soit J le milieu de [AB].
 - a) Exprimer les vecteurs $\vec{GG'}$ et $\vec{JG'}$ en fonction de \vec{AB} et \vec{AC} puis en déduire que le point J est le point d'intersection des droites (GG') et (AB).
 - b) Démontrer que le barycentre I des points pondérés (B, 2) et (C, -1) appartient à (GG').
3. Soit D un point quelconque du plan n'appartenant pas à la droite (AC).
Soit O le milieu de [CD] et K le milieu de [OA].
 - a) Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que K soit le barycentre de (A, a); (D, b) et (C, c).
 - b) Soit E le point d'intersection des droites (DK) et (AC).
Démontrer que E est le barycentre des points pondérés (A, 2) et (C, 1).

EXERCICE 2

L'objectif est d'étudier la suite u définie par : $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ et pour $n \geq 1$, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

1. Soit f la fonction numérique définie sur $[0 ; 1]$ par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.
 - a) Calculer $f'(x)$ et en déduire u_0 , f' étant la dérivée de f .
 - b) Calculer u_1 .
2. On ne cherchera pas à calculer u_n
 - a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle converge.
 - b) Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$,
on a : $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$.
En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$. (1)
 - c) Déterminer la limite de (u_n) .

3. Pour tout entier naturel $n \geq 3$, on pose $I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx$.

a) Justifier que : $\forall n \geq 3, u_n + u_{n-2} = I_n$.

b) A l'aide d'une intégration par parties de I_n , démontrer que : $\forall n \geq 3, nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$.

c) En déduire que : $\forall n \geq 3, (2n-1)u_n \leq \sqrt{2}$. (2)

d) A l'aide des inégalités (1) et (2), démontrer que : $\forall n \geq 3, \frac{n}{(n+1)\sqrt{2}} \leq nu_n \leq \frac{n\sqrt{2}}{2n-1}$

En déduire que la suite (nu_n) est convergente.

PROBLEME

n est un nombre entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique f_n définie sur $]0; 1]$ par : $\begin{cases} f_n(x) = x^2(\ln x)^n \text{ si } x \in]0, 1] \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par (C_n) , la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .
Unité graphique 10 cm.

Partie A

1. Démontrer que f_n est dérivable à droite en 0.

2. a) Démontrer que : $\forall n > 0, 0 < e^{-\frac{n}{2}} < 1$.

b) Résoudre dans $]0; 1]$, l'inéquation : $\ln x + \frac{n}{2} < 0$.

3. a) Démontrer que : $\forall x \in]0; 1], f_n'(x) = 2x(\ln x)^{n-1}(\ln x + \frac{n}{2})$

b) Etudier suivant les valeurs de n , les variations de f_n puis dresser son tableau de variation (On distinguera trois cas : $n=1$, n pair et n impair)

4. a) Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées.

b) Construire (C_1) et (C_2) dans le même repère.

Partie B

t désigne un nombre réel appartenant à $[0; 1]$. On pose $I_n(t) = \int_t^1 f_n(x) dx$ et $L_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

On admet que $L_n = \lim_{t \rightarrow 0} I_n(t)$.

1. Soit F la fonction dérivable et définie sur $[0; 1]$ par : $\begin{cases} F(x) = \frac{x^3}{3}(\ln x) - \frac{x^3}{9} \text{ si } x \in]0, 1] \\ F(0) = 0 \end{cases}$

a) Démontrer que F est une primitive de f_1 sur $[0; 1]$.

b) Calculer L_1 .

2. Soit φ_n la fonction définie sur $]0; 1]$ par $\varphi_n(t) = -\frac{1}{3}t^3(\ln t)^n$.

a) Calculer la limite de φ_n en 0.

b) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\forall t \in]0; 1], I_{n+1}(t) = \varphi_{n+1}(t) - \frac{n+1}{3}I_n(t)$

c) En déduire que : $L_{n+1} = -\frac{n+1}{3}L_n$.

d) Démontrer par récurrence que : $\forall n \geq 1, L_n = (-1)^n \frac{n!}{3^{n+1}}$.

3. Calculer en fonction de n , l'aire $A(n)$ de la partie du plan délimitée par (C_n) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.